Les systèmes de numération et les conversions entre les bases

Table des matières

I. Différents systèmes de numération

Contexte

Dans la vie courante, le système de numération est la base 10 aussi appelée système décimal. Le système binaire (ou base 2) est très utilisé en informatique, car il est constitué de 2 chiffres (0 et 1) qui traduisent en fait le passage du courant : 0 le courant ne passe pas ; 1 le courant passe. La complexité des systèmes électroniques évoluant rapidement et afin de simplifier les écritures, on utilisera la base 16 (ou système hexadécimal) qui permet une traduction très rapide en base 2 et inversement.

Dans ce cours, seront définis les 3 bases (2, 10 et 16) ainsi que les techniques de conversion pour passer de l'une à l'autre.

A. Numération en base 10 (système décimal)

Définition

La base 10 ou système décimal est utilisée dans la vie de tous les jours. Chaque nombre est formé à partir de puissance de 10 en utilisant les chiffres allant de 0 à 9.

Exemple

$2\ 681 = 2 \text{ x} 10^3 + 6 \text{ x } 10^2 + 8\ 10^1 + 1 \text{ x } 10^0$

Pour rappel $10^0 = 1$

Exemple

$3{,}72 = 3 \text{ x } 10^0 + 7 \text{ x } 10^{-1} + 2 \text{ x } 10^{-2}$

B. Numération en base 2 (système binaire)

Définition

La base 2, ou système binaire utilise seulement les chiffres 0 ou 1.

En informatique, on appelle bit chacun des chiffres de la numération binaire. Chaque bit prend donc la valeur 0 ou 1. On peut écrire des chiffres à virgule en binaire.

Exemple

$(11001)_2$ se lit « ***un un zéro zéro un*** ». Pour éviter la confusion entre les bases, on place le nombre entre parenthèse et on met « *2* » en indice. Il correspond au nombre 25 en base 10.

C. Numération en base 16 (système hexadécimal)

Définition

La base 16, ou système hexadécimale utilise les chiffres allant de 0 à 9 plus les 6 premières lettres de l'alphabet (de A à F).

Cette numération est très utilisée en électronique et en informatique car elle simplifie considérablement l'écriture des grands nombres trop compliqué à écrire en binaire. On peut écrire des chiffres à virgule en hexadécimal.

Exemple

8AE7 est un nombre écrit en base 16. Il correspond au nombre 35559 en base 10.

II. Conversion entre les bases

A. Passage du binaire au décimal

Méthode

On va écrire le nombre binaire à l'aide de puissance de 2.

On souhaite convertir $(11001)_2$, en base 10. Chaque bit sera placé sous la puissance de 2 correspondante à son rang :

...	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	...
	1	1	0	0	1			

$(11001)^2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 25$

Exemple

Convertir $(11,1)_2$ en base 10 :

...	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	...
				1	1,	1		

$(11,1)^2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} = 3,5$

B. Passage du décimal au binaire

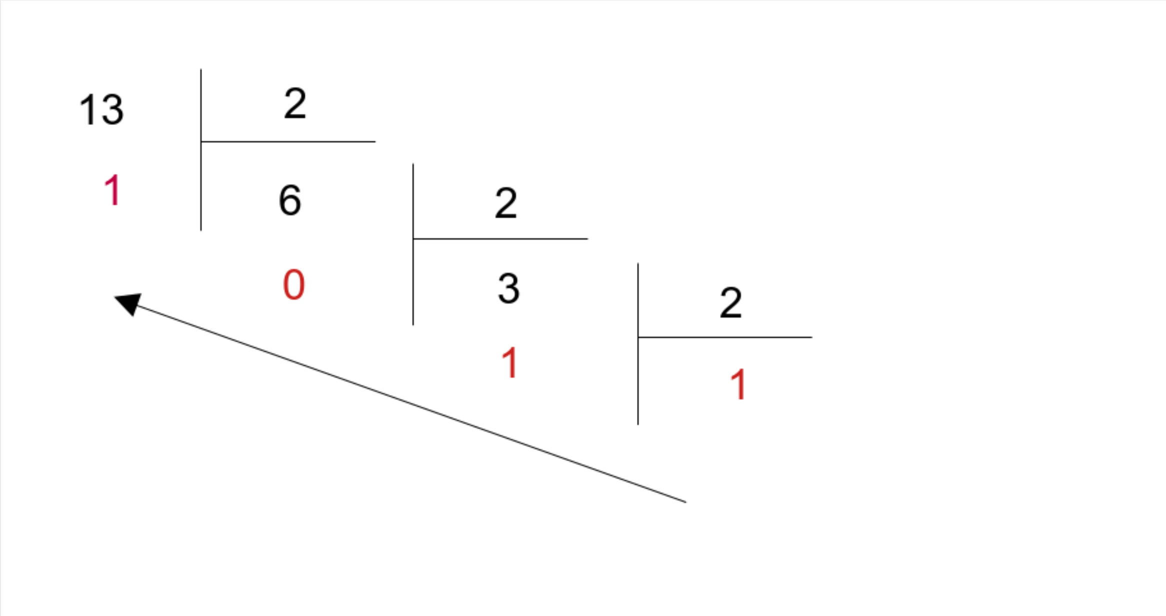
Méthode

Cas des nombre entiers.

Par division successive par 2, le nombre binaire sera constitué de l'assemblage des restes des divisions et du dernier quotient. La lecture se fait du bas vers le haut.

Exemple

On va convertir le nombre 13 en base 2 :



Le sens de lecture va du bas vers le haut : 13 = $(1101)_2$.

Exemple

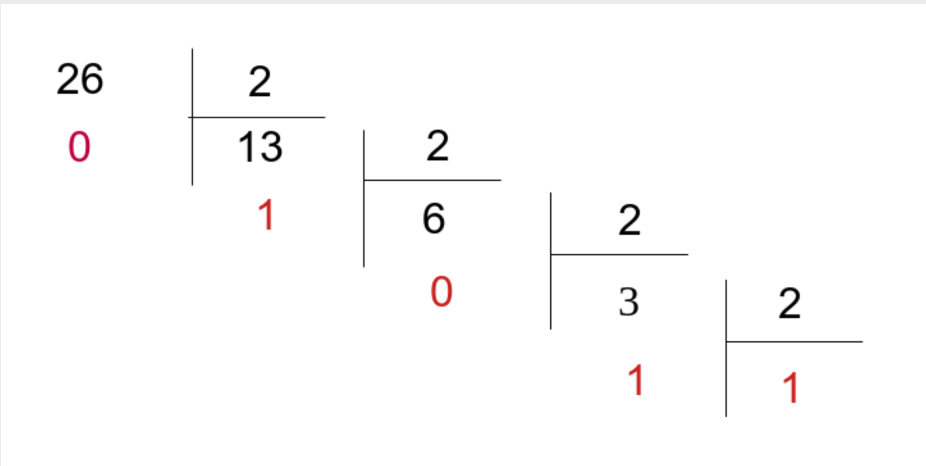
Méthode

Dans le cas des nombres décimaux, la partie entière se traite grâce à la méthode précédente. Pour la partie décimale, on effectue des multiplications successives par 2 de la partie décimale jusqu'à obtenir 1 et on garde uniquement les parties entières des résultats obtenus.

Exemple

On va convertir le nombre 26,375.

Partie entière 26 :



$26 = (11010)_2$
Partie décimale 0,375
0,375 x 2 = 0,75
0,75 x 2 = 1,5
0,5 x 2 = 1
Donc $0{,}375 = (0{,}011)_2$

Pour conclure : $26{,}375 = (11010{,}011)_2$.

Exemple

Remarque

Il n'est pas rare que la conversion d'un nombre décimal de base 10 à base 2 amène à trouver une infinité de 0 et de 1. On devra donc arrondir.

- Si le dernier chiffre non conservé est 0 on effectue une troncature.
- Si le dernier chiffre non conservé est 1 on ajoute 1 au dernier symbole non conservé.

Exemple

Arrondir à 2^{-2} :
- $(101{,}0101)_2 = (101{,}01)_2$ car le dernier chiffre non conservé est 0 donc on tronque.
- $(110{,}0011)_2 = (110{,}01)_2$ car le dernier chiffre non conservé est 0 donc on ajoute 1.

C. Passage de l'hexadécimal au décimal

Méthode

On rappelle que :

Base 16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

On va écrire le nombre binaire à l'aide de puissance de 16.

Imaginons que l'on souhaite convertir $(3A2{,}5B)_{16}$:

…	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0	16^{-1}	16^{-2}	…
			3	A (10)	2,	5	B (11)	

$(3A2{,}2B)_{16} = 3 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 2 \times 16^0 + 5 \times 16^{-1} + 11 \times 16^{-2} = 930{,}35546875$

D. Passage du décimal à l'hexadécimal

Méthode

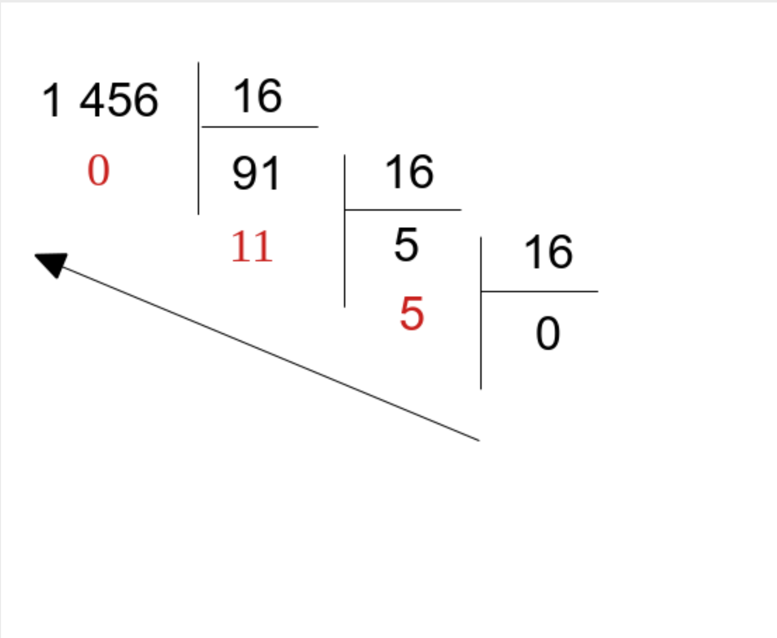
Comme pour le passage de décimal à binaire, on s'occupe de la partie entière puis de la partie décimale.

- On effectue des divisions successives par 16 de la partie entière et on s'arrête quand le quotient est égal à 0 (que l'on ne garde pas). Le sens de lecture va du bas vers le haut.
- Pour la partie décimale, on effectue des multiplications successives par 16 seulement sur les parties décimales jusqu'à obtenir un nombre entier.

Exemple

Convertir 1 456,2265625 en hexadécimal.

Conversion de la partie entière :



On obtient 5 110 → $(5B0)_{16}$ (ne pas oublier que 11 = $(B)_{16}$)

1 456 = $(5B0)_{16}$

Conversion de la partie décimale :

$$0{,}2265625 \times 16 = 3{,}625$$
$$0{,}625 \times 16 = 10$$

0,2265625 = $(0{,}3A)_{16}$ (ne pas oublier que 10 = $(A)_{16}$)

Conclusion : 1 456,2265625 = $(5B0{,}3A)_{16}$

E. Passage d'hexadécimal à binaire

Rappel

Rappels des conversions simples entre les 3 bases :

Base 10	Base 2	Base 16
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Méthode

Chaque symbole (chiffre ou lettre) exprimé en base 16 sera exprimé en base 10 puis en base 2 en codant chaque chiffre sur 4 bits.

Exemple

Exprimons $(4A,5E)_{16}$ en base 2.

Base 16	4	A,	5	E
Base 10	4	10	5	14
Base 2	0100	1010	0101	1110

Conclusion, $(4A,5E)_{16} = (01001011,01011110)_2$. On peut supprimer le ou les 0 placé(s) au début.

F. Passage de binaire à hexadécimal

Méthode

Chaque groupe de 4 bits en base 2 sera exprimé en base 10 puis en base 16. On pourra compléter par des 0 si besoin.

Exemple

Exprimons $(10010101,1111)_2$ en base 16.

Base 2	1001	101	1111
Base 10	9	5,	15
Base16	9	5,	F

Conclusion, $(10010101,1111)_2 = (95,F)_{16}$.

Exemple

Exprimons $(1111011,101)_2$ en base 16.

Base 2	0011	1011	1010
Base 10	3	11,	10
Base 16	3	B,	A

Conclusion, $(1111011,101)_2 = (3B,A)_{16}$.

III. Essentiel

- Pour passer du binaire au décimal, on exprime le nombre à l'aide d'une puissance de 2.
- Pour passer du décimal au binaire, on effectue des divisions successives par 2 de la partie entière et on écrit la liste des restes dans le sens inverse de leur obtention ainsi que le dernier quotient. Pour la partie décimale, on multiplie par 2 successivement les parties décimales jusqu'à obtenir 1 et on écrit les parties entières obtenues successivement.
- Pour passer de l'hexadécimal au binaire, on exprime chaque symbole du nombre hexadécimal en binaire à 4 bits.
- Pour passer du binaire à l'hexadécimal, on regroupe les bits par paquet de 4 et on transforme chaque paquet par sa valeur.
- Pour passer de l'hexadécimal au décimal on exprime le nombre par une puissance de 16.
- Pour passer du décimal à l'hexadécimal, on effectue des divisions successives par 16 de la partie entière et on écrit la liste des restes dans le sens inverse de leur obtention. Pour la partie décimale, on multiplie par 16 successivement les parties décimales jusqu'à obtenir un entier et on écrit les parties entières obtenues successivement.

IV. Auto-évaluation

A. Exercice

Sur un réseau, chaque hôte (ordinateurs, imprimantes, serveur, etc.) possède une adresse unique : l'adresse IP. Il existe 2 types d'adresses IP : l'IPv4 et l'IPv6.

Partie 1 : l'adressage IPv4

Une adresse IPv4 (IP dans la version 4 qui est la version utilisée actuellement) est une suite de 32 bits (4 octets) en séparant chacun des octets par un point.

Rappel : 1 octet = 8 bits.

Lors de configuration de postes informatique, l'adresse IP est donnée en valeur décimale. Il y a donc 4 chiffres allant de 0 à 255. Par exemple, 192.168.25.8 est une adresse IPv4.

Question 1

[solution n°1 p.13]

On donne l'adresse IP suivante :

11000000.00110111.11011111.00000110 : transformer cette adresse IPv4 en décimal.

Question 2

[solution n°2 p.13]

Le masque de réseau est une suite de 32 bits dont une partie fixe l'adresse de réseau matérialisée par une série continue de 1 (partie gauche) et une partie correspond aux hôtes identifiés par série continue de 0 (partie droite).

On donne les différentes classes de l'adresse IPv4 dans le tableau ci-dessous.

Nom de la classe	Masque en décimal	Masque en binaire
Classe A	255.0.0.0	
Classe B	255.255.0.0	
Classe C	255.255.255.0	
Classe D	255.255.255.255	

Convertir chaque masque en binaire. Chacun doit posséder 32 bits.

Question 3

[solution n°3 p.13]

Le nombre d'hôtes de chaque classe est calculé en utilisant le masque en binaire et la formule : *nombre d'hôte* $= 2^{\text{nombre de } 0} - 2$.

Calculer pour la classe A et la classe B le nombre d'hôtes disponibles.

Partie 2 : l'adressage IPv6

L'adressage IPv6 dispose d'un espace d'adressage plus important que l'IPv4. En effet ses adresses sont codées sur 128 bits et non 32 comme dans l'IPv4.

Question 4

[solution n°4 p.13]

Combien d'octets possède une adresse IPv6 ?

Question 5

[solution n°5 p.13]

On préfèrera adopter une écriture hexadécimale où 8 groupes de 16 octets sont séparés par deux points.

On donne l'adresse IPv6 suivante : 2001 : 0db8 : 0000 : 85a3 : 0000 : 0000 : ac1f : 8001.

Écrire en décimale la fin de l'adresse : ac1f : 8001.

Solutions des exercices

p. 10 Solution n°1

11000000.00110111.11011111.00000110 = 192.55.223.6

p. 10 Solution n°2

Comme 255 = $(11111111)_2$, on peut donner les masques des différentes classes :

Nom de la classe	Masque en décimal	Masque en binaire
Classe A	255.0.0.0	11111111.00000000.00000000.00000000
Classe B	255.255.0.0	11111111. 11111111. 00000000.00000000
Classe C	255.255.255.0	11111111. 11111111. 11111111. 00000000
Classe D	255.255.255.255	11111111. 11111111. 11111111. 11111111

p. 11 Solution n°3

Nom de la classe	Masque en décimal
Classe A	2^{24} - 2 = 16 777 214
Classe B	2^{16} - 2 = 65 534

p. 11 Solution n°4

En IPv6 on a 16 octets.

p. 11 Solution n°5

ac1f : 8001 = 44063.32769