La gestion des stocks - Techniques de base

Table des matières

I. Préambule

La finalité du budget des approvisionnements est de respecter les besoins en quantités des articles (ou des matières $1^{ères}$) pour la vente (ou la fabrication) et d'en rechercher le moindre coût.

Bien comprendre d'ores et déjà que le coût des approvisionnements dépendra essentiellement des deux paramètres suivants :

A. Le coût de lancement des commandes

Plus il y aura de commandes et plus le coût sera élevé.

B. Le coût de possession du stock

Plus le stock reste longtemps dans l'entreprise et plus le coût sera élevé.

Optimiser le coût total des approvisionnements c'est donc chercher l'équilibre entre un nombre de commandes et une durée de stockage.

Dans la réalité, plusieurs cas peuvent se rencontrer :

- **1^{er} cas - L'entreprise dispose d'énormément d'articles (ou de références).**

  Imaginez le cas d'une entreprise de vente par correspondance d'articles de grande consommation !

  Il est évident, malgré les progrès de l'informatique, qu'elle va d'abord se focaliser sur les articles les plus importants pour elle (en termes de volume et/ou en valeur).

  Les autres articles étant gérés avec plus de souplesse.

- **$2^{ème}$ cas - L'entreprise a peu d'articles (ou de références) à vendre.**

  Dans ce cas, elle attachera la même importance à tous les articles.

Conséquences

Dans une $1^{ère}$ partie nous nous intéresserons aux différentes techniques permettant de classer les références entre celles qu'il faut suivre avec beaucoup d'attention et les autres. La solution de ce problème peut être résolue par la méthode dite des « *20/80* » ou par la méthode dite « *ABC* ».

Dans une $2^{ème}$ partie, nous étudierons donc en détail l'optimisation de la gestion des stocks.

II. Le classement des différents articles par la méthode des « 20/80 »

A. Principe

Cette méthode consiste en fait à identifier les articles représentant 20 % des références et qui coûtent 80 % de la valeur totale.

Les articles rentrant dans les 20 % étant ensuite suivis avec beaucoup d'attention !

B. Application de la méthode des 20/80

Le plus simple est d'illustrer cette méthode avec un exemple. Une succursale de pièces détachées d'automobiles rencontre beaucoup de problèmes d'approvisionnement.

Vous faites un stage au service comptable de cette entreprise et l'on vous demande de tenter d'améliorer la gestion des stocks.

Compte tenu du nombre important de références, vous proposez dans un 1er temps de classer les articles selon la méthode « *20/80* ».

Le service de comptabilité vous fournit les éléments suivants :

Références articles	Prix d'achat unitaire HT	Quantités annuelles consommées
P1	450.00	2,320
P2	25.00	4,490
P3	12.50	6,300
P4	2,500.00	1,800
P5	80.00	3,125
P6	250.00	1,480
P7	480.00	470
P8	3,600.00	2,100
P9	1,000.00	940
P10	290.00	910
P11	320.00	485
P12	58.00	210

Remarque

Bien entendu, à titre pédagogique, nous illustrons ce problème avec peu de références. Toutefois bien comprendre que la résolution du problème avec 10 références ou avec 10 000 doit respecter le même cheminement.

Procédure de résolution

1ère étape

Construction d'un tableau faisant apparaître le coût total, par référence pour la période étudiée.

Références articles	Prix d'achat unitaire HT (I)	Quantités annuelles consommées (II)	Valeur totale (III) = I * II
P1	450.00	2,320	1,044,000
P2	25.00	4,490	112,250
P3	12.50	6,300	78,750
P4	2,500.00	1,800	4,500,000
P5	80.00	3,125	250,000
P6	250.00	1,480	370,000
P7	480.00	470	225,600
P8	3,600.00	2,100	7,560,000
P9	1,000.00	940	940,000
P10	290.00	910	263,900
P11	320.00	485	155,200
P12	58.00	210	12,180

2ème étape

Construction d'un tableau dans lequel :

- Les références sont classées en partant de celle générant le coût le plus élevé au coût le plus faible (par ordre décroissant),
- On calcule le % cumulé de la valeur totale,
- On calcule le % cumulé du nombre de références.

Ceci revient donc au tableau suivant :

Article	Valeur	Valeur cumulée	Rang des références	% cumulé du nombre de références	% cumulé de la valeur totale
P8	7,560,000	7,560,000	1	**(b)** 8,33	**(e)** 48,70
P4	4,500,000	**(a)** 12 060 000	2	**(c)** 16,67	**(f)** 77,70
P1	1,044,000	13,104,000	3	25.00	84.40
P9	940,000	14,044,000	4	33.33	90.50
P6	370,000	14,414,000	5	41.67	92.90
P10	263,900	14,677,900	6	50.00	94.60
P5	250,000	14,927,900	7	58.33	96.20
P7	225,600	15,153,500	8	**(d)** 66,67	97.70
P11	155,200	15,308,700	9	75.00	98.70
P2	112,250	15,420,950	10	83.33	**(g)** 99,40
P3	78,750	15,499,700	11	91.67	99.90
P12	12,180	15,511,880	12	**100.00**	**100.00**
Somme	**15,511,880**	-	-	-	-

- **(a)** → 7 560 000 + 4 500 000
- **(b)** → 1 référence/12 références au total
- **(c)** → 2 références/12 références au total
- **(d)**→ 8 références/12 références au total
- **(e)** → 7 560 000/15 511 880
- **(f)** → 12 060 000/15 511 880
- **(g)**→ 15 420 950/15 511 880

3ème étape. Interprétation du tableau et choix

Interprétation

Examinons les deux dernières colonnes de ce tableau :

- La 1ère ligne signifie que 8,33 % des références engendrent 48,70 % du coût total,
- La 2ème ligne signifie que 16,67 % des références engendrent 77,70 % du coût total.

Choix des références avec beaucoup d'attention.

En fait la méthode des 20/80 va permettre d'isoler les 20,00 % des produits qui représentent 80,00 % du coût total d'approvisionnement.

Conséquence

Si on se réfère à l'exemple, il est évident que l'on va choisir les références P8 et P4.

En effet, ces deux références permettent de se rapprocher le plus « *de l'idéal* » (avec cette méthode).

→ Choisir les 20,00 % des références qui coûtent 80,00 % du total.

Vous constatez donc que souvent, on ne « *tombe* » pas juste sur 20/80. Mais il faut essayer de s'en rapprocher le plus !

Ceci dit, pourquoi avoir choisi les références P8 et P4 seulement et pas les références P8, P4 et P1, (vu l'écart autour de la limite des 20 % et des 80 %) ?

Dans les cas comme celui-ci, on a recours à la méthode suivante : **on compare la somme des écarts en valeur absolue avec la répartition idéale.**

- Si on prend P8 seulement, il vient :

  |(8,33 - 20,00)| + |(48,70 - 80,00)| = 42,97 d'écart avec « *l'idéal* »
- Si on prend les articles P8 et P4 seulement, il vient :

  |(16,67 - 20,00)| + |(77,70 - 80,00)| = 5,63 d'écart avec « *l'idéal* »
- Si on prend les articles P8, P4 et P1, il vient :

  |(25,00 - 20,00)| + |(84,40 - 80,00)| = 9,40 d'écart avec « *l'idéal* »

Conclusion

5,63 étant < à 9,40, on ne prend en compte que les articles P8 et P4.

Attention

Pour faire le choix, bien prendre la valeur absolue, sinon cela pourrait faire 0 !

III. Le classement des différents articles par la méthode « ABC »

A. Principe

Cette méthode reprend les mêmes principes généraux que celle des 20/80.

Simplement à la place de scinder les références en deux catégories (celles qui représentent 20,00 % des références et 80,00 % du coût total d'une part, et celles qui représentent donc 80,00 % des références et 20,00 % du coût total), elle les scinde en trois catégories.

En théorie, les limites entre les trois catégories devraient être les suivantes :

- Catégorie A → 10,00 % des références = 65,00 % de la valeur,
- Catégorie B → 25,00 % des références = 25,00 % de la valeur,
- Catégorie C → 65,00 % des références = 10,00 % de la valeur.

Ceci veut dire que les références classées dans la catégorie A devront être suivies avec beaucoup d'attention, celles de la catégorie B avec un peu moins d'attention et celles de la catégorie C avec plus de souplesse.

B. Application

Application à l'exemple précédent.

Attention

Il n'est pas toujours facile de scinder les articles en trois catégories respectant l'idéal de répartition en nombre de références et valeur !

Le plus efficace est d'établir les tableaux suivants pour faire le choix :

Pour les articles de la catégorie A

Références	% cumulé du nombre de références	% idéal du nombre de références	Différence en valeur absolue	% cumulé en valeur	% idéal en valeur	Différence en valeur absolue	Différence totale en valeur absolue
	1	2	3 = |1 - 2|	4	5	6 = |4 - 5|	7 = 3 + 6
P8	8.33	10.00	1.67	48.70	65.00	16.30	17.97
P8 + P4	16.67	10.00	6.67	77.70	65.00	12.70	19.37
P8 + P4 + P1	25.00	10.00	15.00	84.40	65.00	19.40	34.40

Conclusion pour la catégorie A

Nous allons classer en catégorie « *A* » l'article P8 puisque c'est lui qui donne le moins de différence avec la répartition idéale !

Pour les articles de la catégorie B

Remarque

Le principe est le même que pour obtenir les articles à classer en catégorie A, mais bien voir que par définition les articles classés en catégorie A ne sont plus à prendre en compte.

Attention

Au % du nombre de référence et du % en valeur !

Références	% cumulé du nombre de références	% idéal du nombre de références	Différence en valeur absolue	% cumulé en valeur	% idéal en valeur	Différence en valeur absolue	Différence totale en valeur absolue
	1	2	3 = $\lvert 1 - 2 \rvert$	4	5	6 = $\lvert 4 - 5 \rvert$	7 = 3 + 6
P4	16,67 – 8,33 = 8,33	25.00	16.67	77,70 – 48,70 = 29,00	25.00	4.00	20.67
P4 + P1	25,00 – 8,33 = 16,67	25.00	8.33	84,40 – 48,70 = 35,70	25.00	10.70	19.03
P4 + P1 + P9	33,33 – 8,33 = 25,00	25.00	0	90,50 – 48,70 = 41,80	25.00	16.80	16.80
P4 + P1 + P9 + P6	41,67 – 8,33 = 33,34	25.00	8.34	92,90 – 48,70 = 44,20	25.00	19.20	27.54

Conclusion pour la catégorie B

Nous allons classer en catégorie « *B* » les articles P4 + P1 + P9.

Pour les articles de la catégorie C

Par définition il faut classer les autres articles → P6 + P10 + P5 + P7 + P11 + P2 + P3 + P12.

Conclusion générale sur les méthodes « *20/80* » et « *ABC* ».

Selon les cas de figure, il est préférable de choisir l'une ou l'autre méthode. Il faut donc s'adapter à la réalité.

Toutefois, bien comprendre que les articles que l'on suit un peu plus souplement ne doivent pas être négligés pour autant.

En effet, nous verrons que le coût d'une rupture de stock peut être très important en valeur et préjudiciable en termes d'image !

IV. Le modèle de Wilson dans le cas où aucune pénurie n'est admise

A. Principe

La gestion d'un stock a pour but de minimiser les coûts suivants :

- Coût de stockage ou de possession du stock,
- Coût de passation des commandes ou de réapprovisionnement,
- Coût de pénurie ou de défaillance.

Cet objectif de réduction de coût passera par une optimisation des quantités commandées, des délais de réapprovisionnement, du nombre de commandes, etc.

Le modèle de Wilson permet une gestion scientifique des stocks.

Toutefois, les hypothèses suivantes doivent être réunies :

- Consommation connue à l'avance et régulière, n'étant pas affectée par des variations saisonnières,
- Période de réapprovisionnement (délai entre deux commandes) constante,
- Pas de pénurie admise (il n'y a donc pas de stock de sécurité),
- Prix unitaire des articles constants sur la période.

Si ces conditions sont remplies, le modèle de Wilson « *classique* » permet de calculer :

- La quantité économique (ou lot économique) à commander (Q_E),
- Le nombre optimal de commandes (N_E),
- La durée optimale de la période de réapprovisionnement (T_E),
- Le coût total de gestion optimal (Y_E).

B. Détermination de la Quantité Économique à commander (QE)

1. 1er cas - L'étude de la gestion des stocks se fait sur l'année (12 mois)

a. Les abréviations à utiliser

Si nous définissons les éléments suivants :

- D → Consommation **annuelle** en **quantité**,
- P → Prix d'achat unitaire du produit ou de l'article,
- C_L → Coût de passation d'une commande (ou coût de lancement d'une commande),
- T → Taux **annuel** de possession du stock,
- Q → Quantité d'articles ou de produits par commande.

Le coût total de gestion du stock est égal à la somme du coût de passation des commandes et du coût de possession du stock.

b. Le coût total de passation des commandes

Ce coût est le résultat de la multiplication du nombre de commandes dans une année par le coût de lancement d'une commande.

$$\text{Nombre de commandes annuelles} = \frac{D}{Q} = \frac{\text{demande annuelle}}{\text{Quantité commandée à chaque commande}}$$

$$\textbf{Coût total de passation des commandes} = \frac{D}{Q} * C_L$$

Remarque

Bien comprendre qu'ici c'est « *Q* » qui est l'inconnue puisque D et C_L sont connus par définition !

c. Coût total de possession du stock

$$\text{Stock moyen en quantité} = \frac{Q}{2}$$

$$\text{Stock moyen en €} = \frac{Q}{2} * p$$

$$\textbf{Coût total de possession du stock} = \frac{Q}{2} * p * T$$

d. Coût total de gestion du stock (Y)

$$Y \text{ ou } f(Q) = [\frac{D}{Q} * C_L] + [\frac{Q}{2} * P * T]$$

e. Recherche du coût minimum de gestion des stocks

Pour trouver la valeur de Q (l'inconnue) qui minimise la fonction Y, il faut :

- Calculer la dérivée la fonction « *Y* » => Chercher Y',
- Égaler cette dérivée à zéro ,
- Chercher la (ou les) valeur(s) qui annule(nt) cette dérivée → Ce sera l'optimum (ici le minimum) de la fonction coût du stockage.

Rappel

La dérivée d'une somme = La somme des dérivées

D'autre part la dérivée d'une fonction de la forme U/V → $Y' = [\frac{U}{V}]' = [\frac{(U'V) - (UV')}{V^2}]$

$Y' = [\frac{D}{Q} * C_L]' + [\frac{Q}{2} * P * T]'$ → $Y' = [\frac{D * C_L}{Q}]' + [\frac{Q * P * T}{2}]'$

Bien comprendre aussi qu'ici seule « *Q* » est l'inconnue et donc que les autres éléments sont des constantes.

$\text{Dérivons d'abord} : \frac{D * C_L}{Q}$

Sachant que :

- U = D * C_L
- U'= 0 (la dérivée d'une constante est nulle)
- V = Q
- V' = 1 (la dérivée de Q , l'inconnue, est 1)
- $V^2 = Q^2$

Il vient : $(\frac{D * C_L}{Q})' = \frac{(0 * Q) - (D * C_L)}{Q^2} = \frac{-(D * C_L)}{Q^2}$

$\text{Dérivons ensuite} : \frac{Q * P * T}{2}$

Sachant que :

- U = Q * P * T
- U'= P * T
- V = 2
- V' = 0
- $V^2 = 4$

Il vient : $(\frac{Q * P * T}{2})' = \frac{(P * T * 2) - (Q * P * T * 0)}{4} = \frac{(P * T * 2) - 0}{4} = \frac{(P * T)}{2}$

Synthèse

$$Y' = \frac{-(D * C_L)}{Q^2} + \frac{(P * T)}{\mathbf{2}}$$

Les valeurs qui annulent la dérivée donneront le minimum de la fonction « *Coût total de gestion du stock* ».

On pose → la dérivée = 0

Ceci permet de trouver les valeurs (les racines) qui annulent cette dérivée. On trouve donc l'optimum. On ne prend que les racines positives car nous travaillons dans un domaine économique (les quantités) et elles ne peuvent pas être négatives !

$\rightarrow -\frac{D * C_L}{Q^2} + \frac{P * T}{2} = 0 \rightarrow \frac{D * C_L}{Q^2} \rightarrow \frac{(P * T)}{2}$

→ $Q^2 * P * T = D * C_L * 2$ → $Q^2 = \frac{2 * D * C_L}{P * T}$

$\rightarrow Q_E = \sqrt{\frac{\mathbf{2} * D * C_L}{P * T}}$

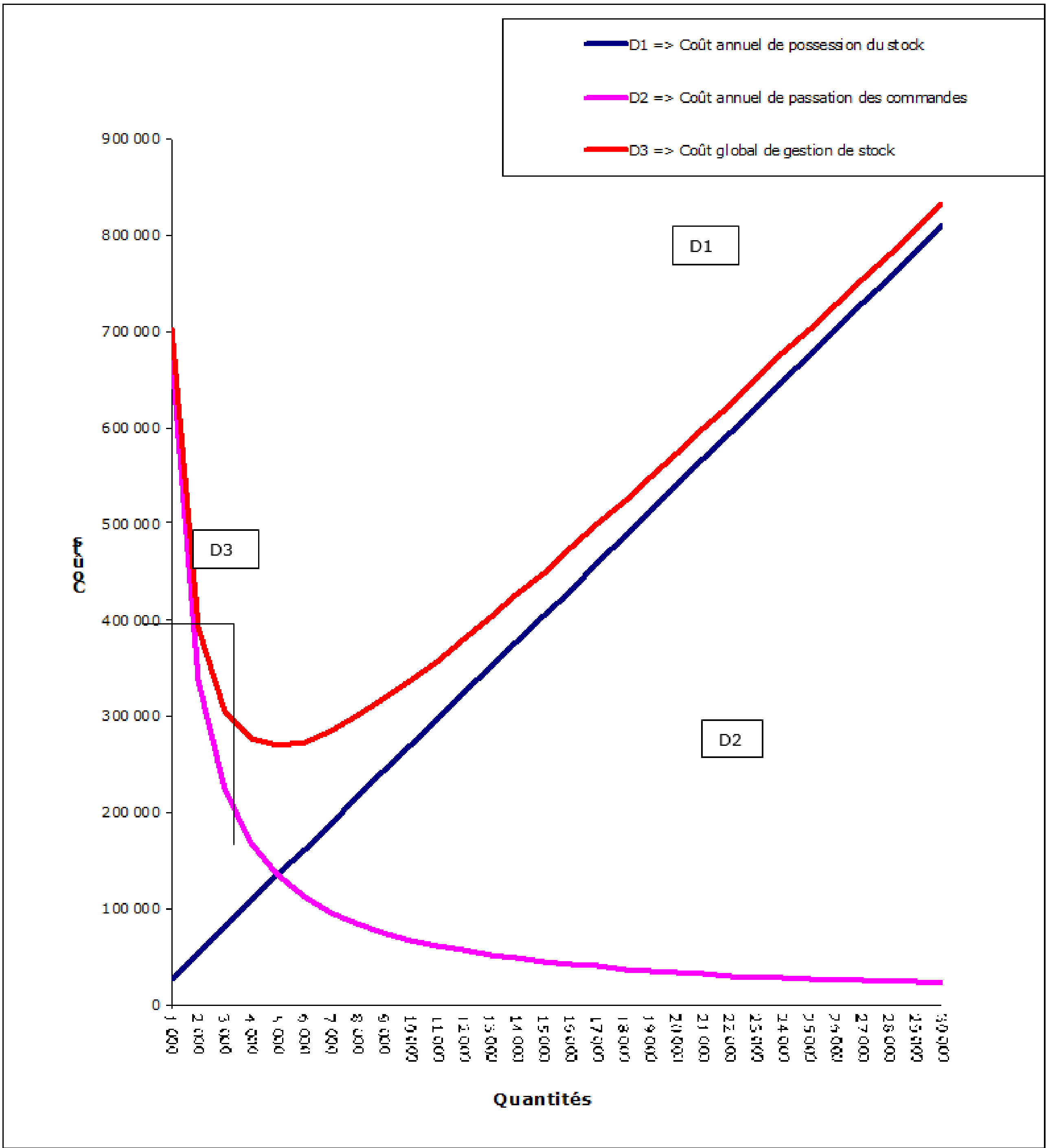
Ceci est donc la formule de Wilson permettant de calculer directement la quantité économique à commander (sans passer par l'étude de la fonction du coût total).

Remarque

Pour trouver la quantité économique à commander, on pourra donc soit étudier la fonction du coût global, soit utiliser directement la formule de Wilson ci-dessus !

Toutefois, il est préférable de bien assimiler la démonstration car dans certains problèmes vous pourriez en avoir besoin !

f. Représentation graphique des différents éléments de gestion de stock



Remarque

1. Comme le montre le modèle de Wilson, le minimum du coût annuel de gestion de stock (D3) correspond bien aux coordonnées des points d'intersection du coût de lancement des commandes (D2) et du coût de possession de stock (D1). Autrement dit le minimum est atteint lorsque le coût de lancement est égal au coût de possession !
2. Il est peu probable que dans l'UE de contrôle de gestion on vous demande d'effectuer le graphique !
3. **Le coût de possession des stocks comprend essentiellement :**
   - Les charges de magasinages : coût des locaux destinés à l'entreposage des matières (loyers, amortissements des constructions), coût d'exploitation des magasins (charges de personnel, entretien, loyers et amortissements des équipements), coût des assurances, etc.
   - La dépréciation des articles stockés notamment pour les articles « *à la mode* », les produits à obsolescence rapide, les matières à durée de conservation limitée.
   - Les aléas occasionnés par les conditions physiques du stockage (accidents pendant les manutentions, disparitions, etc.).
   - Le coût du capital investi : éléments du fonds de roulement, la valeur des stocks étant financée par des ressources propres ou externes. Lorsque les stocks sont financés par des ressources externes, le coût est constitué du montant des intérêts des emprunts correspondants. Si le financement est assuré sur ressources propres, le coût est un coût d'opportunité égal au manque à gagner que cette ressource aurait procuré si elle avait pu être utilisée à une autre fin.
   - En fonction des différentes activités et des diverses catégories de produits stockés, les coûts de possession sont très variables. Ils sont généralement exprimés sous la forme d'un ratio, appelé taux de possession.
4. **Taux de possession** = $\frac{\text{coût de possession annuel du stock}}{\text{valeur du stock moyenne}}$ ou $\frac{\text{Coût de possession annuel d'un article}}{\text{Prix achat unitaire HT d'un article}}$

   Selon les activités, ce taux peut varier de 15 % à 35 %.
5. **Le coût de passation des commandes comprend essentiellement :**
   - **Les opérations administratives** : coût de la correspondance (conception, réalisation, expédition), coût des communications téléphoniques, coût des supports de leur traitement, etc.
   - **Le coût du transport**,
   - **Les opérations de contrôle** : contrôle préalable de la commande, contrôle à la réception de la facture, contrôles à la livraison des matières ou des marchandises portant sur la quantité et la qualité.

g. Illustration n°1

On vous fournit les informations suivantes concernant un produit Z :

- Prix achat unitaire = 4 500,00 €,
- Coût de passation d'une commande = 1 800,00 €,
- Demande annuelle = 7 200 produits,
- Coût de stockage = 10,00 % annuel du prix d'achat d'un produit.

Travail à faire

1. **Calculez la quantité optimale à commander,**
2. **Calculez le nombre de commandes à passer et en déduire le coût global de passation des commandes,**
3. **Calculez le coût de possession du stock,**
4. **Calculez le délai de réapprovisionnement,**
5. **Calculez le coût global du stockage.**

Correction de l'application N° 1

Question 1 - Calculez la quantité optimale à commander (Q_E)

1ère façon de résoudre ce problème de la quantité optimale à commander.

On n'utilise pas la formule de Wilson mais on étudie la fonction : coût du stockage

Rappel

Coût total de gestion du stock → Y = $[\frac{D}{Q} * C_L] + [\frac{Q}{2} * P * T]$

Il vient :

→ Y = $[\frac{7\ 200}{Q} * 1\ 800{,}00] + [\frac{Q}{2} * 4\ 500{,}00 * 0{,}10]$

→ Y = $\frac{12\ 960\ 000}{Q} + \frac{450\ Q}{2}$

→ Y = $\mathbf{\frac{12\ 960\ 000}{Q} + 225Q}$

Il faut dériver le coût total de gestion du stock, donc calculer Y'

Rappel

La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

La dérivée de X = 1

La dérivée de aX = a

$$\text{La dérivée de } \frac{U}{V} = \frac{(U'V - UV')}{V^2}$$

La dérivée d'une constante est nulle.

Il vient → $Y' = \left(\frac{12\ 960\ 000}{Q} + 225Q\right)'$

$$\text{La dérivée de } \frac{12\ 960\ 000}{Q} = \left(\frac{12\ 960\ 000}{Q}\right)'$$

$$\text{Cette dérivée est de la forme } \frac{U}{V} \text{ et est égale à } \frac{(U'V - UV')}{V^2}$$

U = 12 960 000 → U' = 0

V = Q → V' = 1

$V^2 = Q^2$

$$\text{La dérivée de } \left(\frac{12\ 960\ 000}{Q}\right)' = \frac{(0 * Q) - (12\ 960\ 000 * 1)}{Q^2} = \frac{-\ 12\ 960\ 000}{Q^2}$$

La dérivée de 225Q = (225Q)' = 225

$$\text{La dérivée totale} = Y' = -\frac{12\ 960\ 000}{Q^2} + 225$$

Cherchons la (ou les) valeur(s) qui annule cette dérivée.

Il vient → $Y' = -\frac{12\ 960\ 000}{Q^2} + 225 = 0$ → $Y' = -\frac{12\ 960\ 000}{Q^2} = -225$

$Q^2 = \frac{-12\ 960\ 000}{-225} = 57\ 600$ → $\mathbf{Q_E} = \sqrt{57\ 600} = \mathbf{240}$

2ème façon de résoudre ce problème de la quantité optimale à commander

On utilise directement la formule de Wilson.

Il vient :

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{P * T}} = \sqrt{\frac{2 * 7\ 200 * 1\ 800{,}00}{4\ 500{,}00 * 0{,}10}} = 240$$

La quantité optimale à commander est donc de 240 produits.

Question 2 - Calculez le nombre optimal de commandes à passer et en déduire le coût global de passation des commandes.

Calcul du nombre optimal de commandes (N_E)

- **1er cas - Calcul de N_E, connaissant Q_E**

  $$NE = \frac{\text{Consommation annuelle en quantité}}{\text{Quantité économique à commander}} = \frac{D}{Q_E} \rightarrow N_E = \frac{7\ 200}{240} = 30$$

- **2ème cas - On vous demande de calculer directement NE (sans passer par Q_E)**

  On utilise la formule de Wilson qui permet de donner le résultat directement.

  $$N_E = \sqrt{\frac{D * P * T}{2 * C_L}} \rightarrow N_E = \sqrt{\frac{7\ 200 * 4\ 500{,}00 * 0{,}10}{2 * 1\ 800{,}00}} = 30$$

Remarque

S'il fallait démontrer comment trouver N_E, (bien que cette question soit peu probable le jour de l'examen puisqu'il suffit de trouver Q_E pour retrouver tous les autres éléments sans faire la démonstration !), on « *repartirait* » de la formule d'origine du coût total de la gestion des stocks.

Rappel

→ $Y \text{ ou } f(Q) = [\frac{D}{Q} * C_L] + [\frac{Q}{2} * P * T]$

Il suffit de réécrire cette formule en remplaçant Q par son équivalent N.

→ On sait que $N = \frac{D}{Q} \rightarrow Q\ N = D \rightarrow Q = \frac{D}{N}$

→ $Y \text{ ou } f(N) = [\frac{D}{\frac{D}{N}} * C_L] + [\frac{\frac{D}{N}}{2} * P * T]$

→ $Y \text{ ou } f(N) = [\frac{D * C_L}{\frac{D}{N}}] + [\frac{\frac{D * P * T}{N}}{2}] = [D * C_L * \frac{N}{D}] + [\frac{D * P * T}{N} * \frac{1}{2}]$

→ $Y \text{ ou } f(N) = [\frac{N * D * C_L}{D}] + [\frac{D * P * T}{2N}] = [N * C_L] + [\frac{D * P * T}{2N}]$

Il faut maintenant chercher la dérivée de cette fonction.

→ $Y' \text{ ou } f'(N) = [N * C_L]' + [\frac{D * P * T}{2N}]$

Bien comprendre qu'ici seule « *N* » est l'inconnue et donc que les autres éléments sont des constantes.

$\text{Dérivons d'abord} : [N * C_L]$

On sait que la dérivée de ax = a → [N * C_L]' = C_L

Dérivions ensuite : $\left[\frac{D * P * T}{2N}\right]$

sachant que :

→ U = D x * P * T

→ U' = 0 car la dérivée d'une constante est nulle.

→ V = 2N

→ V' = 2

→ $V^2 = 4N^2$

Il vient : $\left(\frac{D * P * T}{N}\right)' = \frac{(0 * 2N) - [(D * P * T) * 2]}{4N^2} = \frac{-(D * P * T)}{2N^2}$

Synthèse

$$Y' = \frac{-(D * P * T)}{2 N^2} + C_L$$

Les valeurs qui annulent la dérivée donneront le minimum de la fonction « *Coût total de gestion du stock* ».

On pose → la dérivée = 0. Ceci permet de trouver les valeurs (les racines) qui annulent cette dérivée. On trouve donc l'optimum.

On ne prend que les racines positives car nous travaillons dans un domaine économique (les quantités) et elles ne peuvent pas être négatives !

→ $\frac{-(D * P * T)}{2N^2} + C_L = 0 \rightarrow C_L = \frac{D * P * T}{2 N^2}$

→ $D * P * T = C_L * 2N^2 \rightarrow N^2 = \frac{D * P * T}{2 * C_L}$

→ $N_E = \sqrt{\frac{D * P * T}{2 * C_L}}$

En déduire le coût de passation des commandes

Coût de passation des commandes = Nombre de commandes * Coût de lancement d'une commande

→ Coût = 30 * 1 800,00 = 54 000,00 €

Question 3 - Calculez le coût de possession du stock

→
$\text{Coût total de possession du stock} = \frac{Q}{2} * P * T = \frac{240}{2} * 4\ 500{,}00 * 0{,}10 = 54\ 000{,}00\ €$

Remarque

Vous voyez que le coût de passation des commandes (54 000 €) est bien égal au coût de possession du stock (54 000 €), donc nous nous trouvons bien à l'optimum.

Question 4 - Calculez le délai optimal de réapprovisionnement (T_E)

- **1er cas - Calcul de T_E, connaissant N_E**

$$T_E = \frac{360}{\text{Nombre de commandes passées dans l'année}} = \frac{360}{30} = 12$$

Ceci veut donc dire que tous les 12 jours **il faudra être livré** (La date de commande intervenant « *x* » jours avant la livraison).

2ème cas - On vous demande de calculer directement TE (sans passer par Q_E ni N_E)

$$T_E = \sqrt{\frac{2 * C_L * 360}{D * \frac{P * T}{360}}} \rightarrow T_E = \sqrt{\frac{2 * C_L * 360 * 360}{D * P * T}} \rightarrow T_E = \sqrt{\frac{2 * C_L * 360^2}{D * P * T}}$$

$$\rightarrow T_E = \sqrt{\frac{2 * 1\ 800{,}00 * 360^2}{7\ 200 * 4\ 500{,}00 * 0{,}10}} \rightarrow T_E = \sqrt{144} = 12$$

Question 5 - Calculez le coût global du stockage (Y_E)

Le coût global du stockage est égal à → Coût de passation + Coût de possession

Il vient :

$$Y_E = [\frac{7\ 200}{Q_E} * 1\ 800{,}00] + [\frac{Q_E}{2} * 4\ 500{,}00 * 0{,}10] = [\frac{7\ 200}{240} * 1\ 800{,}00] + [\frac{240}{2} * 4\ 500{,}00 * 0,$$

→ Y_E = 54 000,00 + 54 000,00 = 108 000,00 €

Remarque

À partir de la formule de Wilson, on peut calculer directement le coût total optimal de la gestion de stocks.

$$Y_E = \sqrt{2 * D * C_L * P * T} = \sqrt{2 * 7\ 200 * 1\ 800{,}00 * 4\ 500{,}00 * 0{,}10}$$

$$Y_E = \sqrt{11\ 664\ 000\ 000} = 108\ 000{,}00\ €$$

2. 2ème cas - L'étude de la gestion des stocks n'est pas sur l'année mais sur une période inférieure (θ)

a. Principe

Le principe est exactement le même que précédemment mais il faut modifier les deux paramètres P et T pour les remplacer par C_S et θ (lire téta).

Dans la formule de Wilson d'origine :

- P = Prix d'achat unitaire du produit ou de l'article
- T = Taux **annuel** de possession du stock
- D = Consommation **annuelle**

Dans la nouvelle formule :

C_S = Coût du stockage en € (par article) et par unité de temps,

C_S = Prix unitaire de l'article x Coût par jour (ou en mois ou en trimestre, etc.) exprimé en %,

θ = **Durée de la période de gestion du stock (exprimée en jours ou en mois ou en trimestre, etc.),**

D = Consommation sur la période étudiée.

Attention

P * T = C_S * θ MAIS « *P* » est différent de « C_S » et « *T* » est différent de « θ »

La formule de Wilson permettant de trouver la quantité économique (Q_E) devient :

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}}$$ → Avec D = Demande sur la période étudiée

La formule de Wilson permettant de trouver le nombre de commande (N_E) devient :

$$N_E = \sqrt{\frac{D * C_S * \theta}{2 * C_L}}$$

La formule de Wilson permettant de trouver la période de réapprovisionnement (T_E) devient :

$$T_E = \sqrt{\frac{2 * C_L * \theta}{D * C_S}}$$

Attention

Selon le choix que vous aurez fait pour exprimer θ (ou que l'énoncé vous aura imposé), T_E (trouvé avec la formule ci-dessus) sera exprimé en mois ou en trimestre ou en année,e tc.

Donc concrètement, **si la période étudiée est l'année par exemple** :

- Si on choisit d'exprimer θ **en jours (alors que la période étudiée est l'année)**

  → θ = Durée de la période de gestion du stock (exprimée en jours) = **360 jours**

  → C_S = Coût du stockage en € par article et par unité de temps (donc par **jour** !)

  → C_S = Prix unitaire de l'article * **Coût par jour** exprimé en %

  → C_S = Prix unitaire de l'article * Coût par jour

  → T_E (*tel que calculé dans la formule ci-dessus*) donnera directement la réponse en jours !

- Si on choisit d'exprimer θ **en mois (alors que la période étudiée est l'année)**

  → θ = Durée de la période de gestion du stock (exprimée en mois) = **12 mois**

  → Cs = Coût du stockage en € par article et par unité de temps (donc par **mois** !)

  → Cs = Prix unitaire de l'article * **Coût par mois** exprimé en %

  → Cs = Prix unitaire de l'article * Coût par jour * 30

  → Il faudra multiplier T_E (*tel que calculé dans la formule ci-dessus*) par 30 pour l'avoir en jours !

- Si on choisit d'exprimer θ **en trimestres (alors que la période étudiée est l'année)**

  → θ = Durée de la période de gestion du stock (exprimée en trimestre) = **4 trimestres**

  → Cs = Coût du stockage en € par article et par unité de temps (donc par **trimestre** !)

  → Cs = Prix unitaire de l'article * **Coût par trimestre** exprimé en %

  → Cs = Prix unitaire de l'article * Coût par jour * 90

  → Il faudra multiplier T_E (*tel que calculé dans la formule ci-dessus*) par 90 pour l'avoir en jours !

- Si on choisit d'exprimer θ **en semestres (alors que la période étudiée est l'année)**

  → θ = Durée de la période de gestion du stock (exprimée en semestre) = **2 semestres**

  → Cs = Coût du stockage en € par article et par unité de temps (donc par **semestre** !)

  → Cs = Prix unitaire de l'article * **Coût par semestre** exprimé en %

  → Cs = Prix unitaire de l'article * Coût par jour * 180

  → Il faudra multiplier T_E (*tel que calculé dans la formule ci-dessus*) par 180 pour l'avoir en jours !

Conséquence

Si la période étudiée est < 1 an (**exemple 1 semestre**), le principe est exactement le même que ci-dessus !

- Si on choisit d'exprimer θ **en jours (alors que la période étudiée est le semestre)**

  →θ = Durée de la période de gestion du stock (exprimée en jours) = **180 jours**

  → Cs = Coût du stockage en € par article et par unité de temps (donc par **jour** !)

  → Cs = Prix unitaire de l'article * **Coût par jour** exprimé en %

  → Cs = Prix unitaire de l'article * Coût par jour

  → T_E (*tel que calculé dans la formule ci-dessus*) donnera directement la réponse en jours !

- Si on choisit d'exprimer θ **en mois (alors que la période étudiée est le semestre)**

  → θ = Durée de la période de gestion du stock (exprimée en mois) = **6 mois**

→ Cs = Coût du stockage en € par article et par unité de temps (donc par **mois** !)

→ Cs = Prix unitaire de l'article * **Coût par mois** exprimé en %

→ Cs = Prix unitaire de l'article * Coût par jour * 30

→ Il faudra multiplier T_E (*tel que calculé dans la formule ci-dessus*) par 30 pour l'avoir en jours !

Etc.

La formule de détermination du coût total optimal de gestion du stock (Y_E)

Le coût total optimal de gestion du stock sera composé du coût de passation des commandes et du coût de possession du stock, pour des montants égaux.

On peut donc écrire :

$Y_E = [\frac{Q_E}{2} * C_S * \theta] + [\frac{D}{Q_E} * C_L]$ ou $Y_E = \sqrt{2 * D * C_L * C_S * \theta}$

b. Application n°1

La demande annuelle d'un article s'élève à 450 000 unités. Le coût de passation d'une commande est de 1 500,00 € et le coût de stockage est de 0,15 € par jour et par article. On admettra que l'année est de 360 jours.

Question

Calculez la quantité économique à commander et le nombre de commandes à passer.

Correction de l'application

Remarque

Dans cette application, vous voyez que la période étudiée est l'année ! Donc, on devrait utiliser P et T.

Or nous n'allons pas le faire. Pourquoi ? Tout simplement car le coût du stockage n'est pas exprimé ici par un taux annuel mais par un coût par article et par jour.

Donc nous allons utiliser → C_S et θ avec θ exprimé en jours et C_s = Coût par jour et par article.

Coût annuel total de possession du stock

→ $\frac{Q}{2} * C_S * \theta = \frac{Q}{2} * 0{,}15 * 360 = 27\ Q$

Coût annuel total de passation de commandes

→ $\frac{D}{Q} * C_L = \frac{450\ 000}{Q} * 1\ 500{,}00 = \frac{675\ 000\ 000}{Q}$

Coût total de gestion du stock (Coût de possession + Coût de passation)

$$Y = 27\ Q + \frac{675\ 000\ 000}{Q}$$

Quantité économique à commander

Il faut dériver le coût total de gestion du stock donc calculer Y'

$$Y' = (27\ Q + \frac{675\ 000\ 000}{Q})'$$

Rappel

La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

La dérivée de X = 1

La dérivée de aX = a

$$\text{La dérivée de } \frac{U}{V} = \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{(U'V - UV')}{V^2}$$

La dérivée d'une constante est nulle

La dérivée de 27 Q = (27 Q)' = 27

$$\text{La dérivée de } \frac{675\ 000\ 000}{Q} = \left(\frac{675\ 000\ 000}{Q}\right)'$$

$$\text{Cette dérivée est de la forme } \frac{U}{V} \text{ et est égale à } \frac{(U'V - UV')}{V^2}$$

U = 675 000 000 → U' = 0

V = Q → V' = 1

$V^2 = Q^2$

$$\text{La dérivée de } \left(\frac{675\ 000\ 000}{Q}\right)' = \frac{(0 * Q) - (675\ 000\ 000 * 1)}{Q^2} = \frac{-675\ 000\ 000}{Q^2}$$

$$\text{La dérivée totale} = Y' = 27 - \frac{675\ 000\ 000}{Q^2}$$

Cherchons, la (ou les) valeur(s) qui annulent cette dérivée.

$$\text{Il vient} \rightarrow 27 - \frac{675\ 000\ 000}{Q^2} = 0 \rightarrow 27 = \frac{675\ 000\ 000}{Q^2}$$

$$\rightarrow Q^2 = \frac{675\ 000\ 000}{27} = 2\ 500\ 000$$

$$\rightarrow Q_E = \sqrt{2\ 500\ 000} = \mathbf{5\ 000}$$

Quantité optimale à commander = QE = 5 000 articles

Coût total gestion du stock

$$\rightarrow 27\ Q + \frac{675\ 000\ 000}{Q}$$

$$\rightarrow (27 * 5\ 000) + \frac{675\ 000\ 000}{5\ 000} = \mathbf{270\ 000{,}00}$$

$$\textbf{Coût de possession du stock} \rightarrow \frac{675\ 000\ 000}{5\ 000} = \mathbf{135\ 000{,}00\ €}$$

Coût de passation des commandes → 27 * 5 000 = **135 000,00 €**

Remarque

Notez que 135 000,00 + 135 000,00 = 270 000,00 € !

$$\textbf{Nombre de commandes} \rightarrow \frac{450\ 000}{5\ 000} = \mathbf{90}$$

Remarque

Pour calculer la quantité économique à commander, nous aurions pu aussi utiliser la formule directe de Wilson (lorsque l'on part de C_S et θ).

Il vient :

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}} = \sqrt{\frac{2 * 450\ 000 * 1\ 500{,}00}{0{,}15 * 360}} = 5\ 000$$

Nous aurions pu choisir par exemple = 1 an → Dans ce cas :

- cs = Coût par an et par article = 0,15 * 360 = 54,00 €
- θ= 1 an

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}} = \sqrt{\frac{2 * 450\ 000 * 1\ 500{,}00}{54{,}00 * 1}} = 5\ 000$$

Nous aurions pu choisir par exemple = 12 mois → Dans ce cas :

- cs = Coût par mois et par article = 0,15 * 30 = 4,50
- θ = 12

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}} = \sqrt{\frac{2 * 450\ 000 * 1\ 500{,}00}{4{,}5 * 12}} = 5\ 000$$

Reprenons le même exemple mais imaginons que l'énoncé nous donne une demande mensuelle de 37 500 articles (les autres paramètres n'étant pas modifiés).

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}} = \sqrt{\frac{2 * 37\ 500 * 1\ 500{,}00}{0{,}15 * 30}} = 5\ 000$$

Vous voyez que la quantité économique n'a pas changé !

Tout simplement parce que l'énoncé précise une demande mensuelle qui est égale au $12^{\text{ème}}$ de la demande annuelle.

→ 37 500 = 450 000 / 12

→ Il est donc logique de trouver la même quantité économique car les autres paramètres n'ont pas été modifiés.

c. Application n° 2

La demande de l'article « *Z* » s'établit à 4 800 unités par an. Le coût de stockage est de 0,54 € par unité et par jour. Le lancement d'une commande engendre un coût de 90,00 €.

Travail à faire

1. **Déterminez le nombre de commandes optimal à passer, la durée optimale de la période de réapprovisionnement et le coût total de gestion optimal (sans avoir recours au calcul de la quantité optimale).**
2. **Calculez le coût de passation des commandes et le coût de stockage.**

Correction de l'application

Nombre de commandes

$$N_E = \sqrt{\frac{D * C_S * \theta}{2 * C_L}} = N_E = \sqrt{\frac{4\ 800 * 0{,}54 * 360}{2 * 90{,}00}} = 72$$

Durée de réapprovisionnement

$$T_E = \sqrt{\frac{2 * C_L * \theta}{D * C_S}} = T_E = \sqrt{\frac{2 * 90{,}00 * 360}{4\ 800 * 0{,}54}} = 5\ (\text{jours})$$

Coût de gestion optimal

$$Y_E = \sqrt{2 * D * C_L * C_S * \theta} \rightarrow Y_E = \sqrt{2 * 4\ 800 * 90{,}00 * 0{,}54 * 360} = 12\ 960{,}00\ €$$

Coût de passation des commandes

→ Nombre de commandes optimal * Coût de lancement d'une commande

→ 72 * 90,00 = 6 480,00 €

Quantité économique

→ Consommation (demande) annuelle/Nombre de commandes

$\rightarrow Q_E = \frac{4\ 800}{72} = 66{,}67(\text{articles} \rightarrow Q_E \text{ théorique})$

Ou, en utilisant la formule directe :

$$Q_E = \sqrt{\frac{\mathbf{2 * D * C_L}}{C_S * \theta}} \rightarrow Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}} = \sqrt{\frac{2 * 4\ 800 * 90{,}00}{0{,}54 * 360}} = 66{,}67$$

Coût de possession du stock

$$\frac{Q}{2} * C_S * \theta = \frac{66{,}67}{2} * 0{,}54 * 360 = 6\ 480{,}32$$

Vérification

Coût de possession du stock + Coût de passation des commandes = Coût total optimal de gestion

→ 6 480,00 + 6 480,00 = 12 960,00 → Coût total optimal de gestion du stock.

Remarque

Dans la réalité nous aurions arrondi le nombre de commandes à 67 !

V. Le problème du stock de sécurité

A. Principe

Dans le modèle de Wilson de base, nous avons précisé précédemment que la pénurie n'était pas admise (pas de rupture de stock car on supposait que l'on connaissait avec certitude les consommations à venir) et donc qu'un stock de sécurité n'était pas nécessaire.

Or, dans la réalité, on peut souhaiter disposer d'un stock de sécurité notamment pour faire face à une augmentation de la demande (par rapport à celle initialement prévue) et/ou pour faire face à des retards de livraison de la part des fournisseurs.

On peut souhaiter deux types de stock de sécurité :

- Stock de sécurité constant,
- Stock de sécurité variable en fonction des quantités commandées.

B. Stock de sécurité constant

1. Coût total de gestion du stock (Y) avec stock de sécurité constant

a. Principe

Le coût total de la gestion de stock est augmenté du coût du stockage du stock de sécurité, sachant que le stock de sécurité en quantité est constant ici !

b. Formule du coût total de gestion de stocks dans ce cas

$$Y_E = [\frac{D}{Q_E} * C_L] + [\frac{Q_E}{\mathbf{2}} * P * T] + [\mathbf{SS} * P * T]$$

Ou (si la période n'est pas l'année) :

$$Y_E = [\frac{D}{Q_E} * C_L] + [\frac{Q_E}{\mathbf{2}} * C_S * \theta] + [\mathbf{SS} * C_S * \theta]$$

2. Incidence de l'existence du SS constant, sur la quantité à commander

a. Principe

Nous avons vu précédemment que pour trouver la quantité économique, il suffisait de calculer la dérivée du coût total. Or, ici le stock de sécurité en quantité étant constant → la dérivée de « *SS * CS * θ* » **est obligatoirement nulle !**

Rappel

La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

Par définition la dérivée d'une constante est nulle (une constante de varie pas !)

b. Conséquence

La quantité économique à commander n'est pas modifiée par l'existence d'un stock de sécurité constant.

Quantité économique à commander →

$Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{P * T}}$ **ou** $Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}}$

En revanche, et fort logiquement, le coût total de la gestion de stock est augmenté du coût du stockage du stock de sécurité.

C. Stock de sécurité variable en fonction des quantités commandées

1. Coût total de gestion du stock (Y) avec stock de sécurité variable

a. Principe

Le coût total de la gestion de stock est augmenté du coût du stockage du stock de sécurité **mais cette fois-ci, les quantités commandées sont modifiées.**

→ **SS en quantité = a * Q**

Avec a = Stock de sécurité souhaité, en quantité, par rapport aux quantités commandées.

Exemple

Le stock de sécurité = a = 1/5 de la quantité commandée

b. Formule du coût total de gestion de stocks dans ce cas

$Y_E = [\frac{D}{Q_E} * C_L] + [\frac{Q_E}{2} * P * T] + [a * Q_E * P * T]$

Ou (si la période n'est pas l'année) :

$Y_E = [\frac{D}{Q_E} * C_L] + [\frac{Q_E}{2} * C_S * \theta] + [a * Q_E * C_S * \theta]$

2. Incidence de l'existence du SS variable, sur la quantité à commander

a. Principe

Nous avons vu précédemment que pour trouver la quantité économique, il suffisait de calculer la dérivée du coût total.

Rappel

La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

Rappel

La dérivée d'une somme = La somme des dérivées

D'autre part la dérivée d'une fonction de la forme U/V → (U/V)' = (U'V – UV')/V^2

$Y' = [\frac{D}{Q} * C_L]' + [\frac{Q}{2} * P * T]' + [a * Q * P * T]' \rightarrow Y' = [\frac{D * C_L}{Q}]' + [\frac{Q * P * T}{2}]' + [a *$

Nous avons déjà étudié ce principe précédemment.

$[\frac{D}{Q} * C_L]' \rightarrow \frac{-(D * C_L)}{Q^2}$

$[\frac{Q}{2} \times p \times T]' = \frac{(P \times T)}{2}$

(a * Q * P * T)' = a * p * T

Synthèse

$$Y' = \frac{-(D * C_L)}{Q^2} + \frac{P * T}{2} + (a * P * T)$$

Les valeurs qui annulent la dérivée donneront le minimum de la fonction « *Coût total de gestion du stock* ».

On pose → La dérivée = 0. Ceci permet de trouver les valeurs (les racines) qui annulent cette dérivée. On trouve donc l'optimum. On ne prend que les racines positives car nous travaillons dans un domaine économique (les quantités) et elles ne peuvent pas être négatives !

$\rightarrow -\frac{D * C_L}{Q^2} + \frac{P * T}{2} + (a * P * T) = 0$

$\rightarrow \frac{(D * C_L)}{Q^2} = \frac{P * T}{2} + (a * P * T) \rightarrow \frac{D * C_L}{Q^2} = \frac{P * T}{2} + (P * T) * a$

$\frac{(D * C_L)}{Q^2} = (P * T)\ (\frac{1}{2} + a) \rightarrow Q^2 = \frac{D * C_L}{(P * T) * (\frac{1}{2} + a)}$

$Q_E = \sqrt{\frac{D * C_L}{(P * T)\ (\frac{1}{2} + a)}}$ **ou** $Q_E = \sqrt{\frac{D * C_L}{(C_S * \theta)\ (\frac{1}{2} + a)}}$ selon le cas

b. Conséquence

La quantité économique à commander est modifiée par l'existence d'un stock de sécurité variable.

Par ailleurs (comme dans le cas précédent), et fort logiquement, le coût total de la gestion de stock est augmenté du coût du stockage du stock de sécurité.

D. Exemple

1. Énonce

Une société a besoin de 50 000 articles par an. Le coût de stockage est de 0,10 € par unité et par jour ouvrable (240 jours ouvrables par an dans cette société). Le coût de passation d'une commande est de 350,00 €.

1. **Calculez la quantité économique à commander et le coût annuel de gestion des stocks.**
2. **Même question s'il existe un stock de sécurité de 1 500 unités.**
3. **Même question s'il existe un stock de sécurité de 15 % de la quantité commandée.**

2. Réponse

1) Calculez la quantité économique à commander et le coût annuel de gestion des stocks

Quantité économique

$\rightarrow Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}} \rightarrow Q_E = \sqrt{\frac{2 * 50\ 000 * 350{,}00}{0{,}10 * 240}} \rightarrow Q_E = \mathbf{1\ 208}$

Coût annuel de gestion de stock

$\rightarrow Y_E = [\frac{Q_E}{2} * C_S * \theta] + [\frac{D}{Q_E} * C_L]$ ou $Y_E = \sqrt{2 * D * C_L * C_S * \theta}$

→

$$Y_E = [\frac{1\ 208}{2} * 0{,}10 * 240] + [\frac{50\ 000}{1\ 208} * 350{,}00] \text{ ou } Y_E = \sqrt{2 * 50\ 000 * 350{,}00 * 0{,}10 * 240}$$

Y_E= 14 496 + 14 487 = 28 983 €

Remarque

La légère différence entre le coût de possession et le coût de possession est lié aux arrondis !

2) Même question s'il existe un stock de sécurité de 1 500 unités

Quantité économique

La quantité économique n'est pas modifiée dans ce cas → **Q_E= 1 208**

Coût annuel de gestion de stock

$$Y_E = [\frac{Q}{2} * C_S * \theta] + [\frac{D}{Q} * C_L] + [SS * C_S * \theta]$$

$$Y_E = [\frac{1\ 208}{2} * 0{,}10 * 240] + [\frac{50\ 000}{1\ 208} * 350{,}00] + [1\ 500 * 0{,}10 * 240]$$

$$Y_E = \mathbf{14\ 496 + 14\ 487 + 36\ 000 = 64\ 983}\ €$$

3) Même question s'il existe un stock de sécurité de 15 % de la quantité commandée

Quantité économique

$$Q_E = \sqrt{\frac{D * C_L}{(C_S * \theta)(\frac{1}{2} + a)}} \rightarrow Q_E = \sqrt{\frac{50\ 000 * 350{,}00}{(0{,}10 * 240)\ (\frac{1}{2} + 0{,}15)}} = Q_E = \mathbf{1\ 059}$$

Coût annuel de gestion de stock

$$Y_E = [\frac{Q}{2} * C_S * \theta] + [\frac{D}{Q} * C_L] + [a * Q * C_S * \theta]$$

$$Y_E = [\frac{1\ 059}{2} * 0{,}10 * 240] + [\frac{50\ 000}{1\ 059} * 350{,}00] + [0{,}15 * 1\ 059 * 0{,}10 * 240]$$

$$Y_E = \mathbf{12\ 708 + 16\ 525 + 3\ 812 = 33\ 045}\ €$$

Attention

Bien comprendre que dans les questions 2 et 3 il faut se faire livrer (donc acheter) le SS au début de la 1ère période car il n'est pas inclus dans la demande de la période.

Question 2→ QE avec SS = QE sans SS → Donc le SS n'est pas inclus, par définition, dans la demande de la période.

Question 3 → QE avec SS de 15 % (1 059) est différent de QE avec SS de 1 500 unités mais la demande reste à 50 000 articles !

VI. Le modèle de Wilson appliqué à une tarification dégressive

A. Principe

Un fournisseur peut mettre en place une politique de tarification dégressive en fonction des quantités commandées.

Ceci ayant pour finalité première d'inciter les clients à acheter des quantités plus grandes du fait d'un prix d'achat plus faible.

Ainsi, plus les quantités commandées seront importantes plus le prix sera bas !

B. Problématique

Plus les quantités commandées seront importantes, plus le nombre de commandes et donc le coût de passation des commandes sera faible.

Rappel

- D→ Consommation annuelle en quantité
- Q → Quantité commandée à chaque commande
- CL → Coût de passation d'une commande
- Coût de passation des commandes = (D / Q) * C_L
- Coût de possession du stock = (Q / 2) * P * T

Plus les quantités commandées sont importantes, plus le coût de possession du stock sera grand. Ceci peut être amoindri ou annulé si le prix d'achat du produit est suffisamment bas.

Le problème est donc de savoir si les économies réalisées sur le prix d'achat du produit ou de l'article et sur le coût de passation des commandes seront suffisantes pour permettre de compenser l'augmentation du coût de possession du stock.

C. Méthodologie

Pour trouver la solution à la problématique posée ci-avant, il faut suivre la procédure suivante qui se décompose en deux étapes :

1. 1ère étape

Il faut calculer **pour chaque tranche de prix** la valeur de Q_E, grâce à une des formules de Wilson énoncée ci-avant.

→ $Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{P * T}}$ ou $Q_E = \sqrt{\frac{2 * D * C_L}{C_S * \theta}}$

Puis il faudra vérifier que la valeur de Q_E que l'on vient de trouver, est compatible avec les quantités correspondantes à la tranche de prix proposée par le fournisseur.

2. 2ème étape

Il faudra calculer, **pour chaque tranche de prix**, le coût total optimal de gestion du stock **en intégrant cette fois-ci le coût d'achat des articles ou des produits** sur la période de gestion (D x P).

- D → Consommation annuelle (ou mensuelle ou trimestrielle , etc.) en quantité
- P → Prix d'achat unitaire des produits ou des articles

Donc si on appelle Z le coût global de gestion des stocks, il vient :

$$Z = (D * P) + (\frac{D}{Q} * C_L) + (\frac{Q}{2} * C_S * \theta)$$

ou

$Z = (D * P) + (\frac{D}{Q} * C_L) + (\frac{Q}{2} * P * T)$

La solution optimale correspondra à la valeur de Q_E qui minimise la fonction Z.

D. Application n° 1

1. Énoncé

Une entreprise commerciale vend une seule catégorie de produit.

Ce produit est acheté auprès d'un fournisseur pratiquant une politique de prix dégressifs en fonction des quantités commandées.

La demande annuelle est de 100 000 produits, le coût de passation d'une commande est de 1 500,00 € et le coût de possession du stock est de 10 % annuel.

Quantités commandées	Prix unitaire
Q < 10 000	12.00 €
10 000 ≤ Q < 25 000	11.60 €
25 000 ≤ Q < 50 000	11.20 €
Q ≥ 50 000	10.90 €

Travail à faire

Déterminez la quantité économique optimale à commander.

2. Correction

Pour la première tranche → Q < 10 000 → P = 12,00 €

Remarque

Ici on passe par « *P * T* » et pas par « C_S *et* θ » compte tenu de l'énoncé.

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * 100\ 000 * 1\ 500{,}00}{12{,}00 * 0{,}10}} = \mathbf{15\ 811{,}39}$$

Ceci veut donc dire que compte tenu du prix unitaire (12,00 €), la quantité économique à commander serait de 15 811 articles.

Problème

Cette valeur de Q_E ne rentre pas dans la fourchette des quantités commandées.

En effet, pour 12,00 €, la quantité commandée devrait être au maximum de 10 000 articles.

Donc pour cette tranche de prix, nous garderons une valeur de Q_E maximum « *autorisée* » qui est donc de 9 999 (car < 10 000).

Nous pouvons donc maintenant calculer le coût global de la gestion des stocks (Z) pour cette tranche.

→

$$Z = (12{,}00 * 100\ 000) + [\tfrac{9\ 999}{2} * 12{,}00 * 0{,}10] + [\tfrac{100\ 000}{9\ 999} * 1\ 500{,}00] = 1\ 221\ 000{,}90$$

→ Z = 1 221 000,90 €

Pour la deuxième tranche (10 000 ≤ Q < 25 000) → P = 11,60 €

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * 100\ 000 * 1\ 500{,}00}{11{,}60 * 0{,}10}} = \mathbf{16\ 081{,}68}$$

Ceci veut donc dire que compte tenu du prix unitaire (11,60 €), la quantité économique à commander serait de 16 081 articles. Cette valeur de Q_E rentre dans la fourchette de valeurs de la deuxième tranche.

→ Nous pouvons calculer Z en prenant Q_E

$$Z = (11{,}60 \;*\; 100\ 000) + [\frac{16\ 081{,}68}{2} \;*\; 11{,}60 \;*\; 0{,}10] + [\frac{100\ 000}{16\ 081{,}68} \;*\; 1\ 500{,}00]$$

→ Z = 1 178 654,76 €

Pour la troisième tranche (25 000 Q < 50 000) → P = 11,20 €

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * 100\ 000 * 1\ 500{,}00}{11{,}20 * 0{,}10}} = \mathbf{16\ 366{,}34}$$

La valeur de Q_E n'est pas compatible avec la fourchette de valeurs de la 3ème tranche (au moins 25 000 et au maximum 50 000). Pour cette tranche, la valeur de Q_E à retenir est donc de 25 000 produits.

$$\rightarrow Z = (100\ 000 \;*\; 11{,}20) + [\frac{25\ 000}{2} \;*\; 11{,}20 \;*\; 0{,}10] + [\frac{100\ 000}{25\ 000} \;*\; 1\ 500{,}00]$$

→Z = 1 140 000 €

Pour la quatrième tranche (Q 50 000) → P = 10,90 €

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * 100\ 000 * 1\ 500}{10{,}90 * 0{,}10}} = \mathbf{16\ 590{,}04}$$

Cette valeur de Q_E n'est pas comprise dans la fourchette de valeurs de la quatrième tranche. La valeur de Q_E à retenir est donc de 50 000.

$$Z = (100\ 000 \;*\; 10{,}90) + [\frac{50\ 000}{2} \;*\; 10{,}90 \;*\; 0{,}10] + [\frac{100\ 000}{50\ 000} \;*\; 1\ 500{,}00]$$

→Z = 1 120 250 €

Conclusion

Si l'entreprise souhaite minimiser le coût de son approvisionnement en produits, elle devra passer deux commandes de 50 000 produits.

Dans cette hypothèse, le coût total de la gestion de ce stock sera de 1 120 250 €.

E. Application n° 2

1. Enoncé

Soit un produit P dont la demande annuelle s'élève à 20 000 produits.

Le taux annuel de possession du stock est de 22,96 %. Le coût de passation d'une commande est 180,00 €.

Le prix d'achat unitaire de ce produit est de 400,00 €. Le fournisseur accorde une remise de 5 % si la commande porte sur une quantité supérieure à 10 000 produits.

Travail à faire

Calculez la quantité économique à commander.

2. Correction

Calcul de la valeur de Q_E avec un prix d'achat de 400,00 € (Q < 10 000)

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * 20\ 000 * 180{,}00}{400{,}00 * 0{,}2296}} \cong 280$$

Ici Q_E est compatible avec la tranche (< 10 000)

$$\rightarrow Z = (400{,}00 \;*\; 20\ 000) + [\frac{280}{2} \;*\; 400{,}00 \;*\; 0{,}2296] + [\frac{20\ 000}{280} \;*\; 180{,}00]$$

→ Z = 8 025 714,74 €

Calcul de la valeur de Q_E avec un prix d'achat de 380,00 €.

Dans ce cas, nous profitons de la remise de 5 % → 400,00 * 0,95 = 380,00

$$Q_E = \sqrt{\frac{2 * 20\ 000 * 180{,}00}{380{,}00 * 0{,}2296}} = 287{,}27$$

La valeur de Q_E n'est pas compatible avec les quantités imposées (commande > 10 000) pour pouvoir bénéficier de la remise de 5 % → On retiendra une valeur de Q_E de 10 000 produits.

$$\rightarrow Z = (20\ 000 * 380{,}00) + [\frac{10\ 000}{2} * 380{,}00 * 0{,}2296] + [\frac{20\ 000}{10\ 000} * 180{,}00]$$

→ Z = 8 036 600 €

Conclusion

Dans un objectif de minimisation du coût total de gestion du stock, il sera préférable de passer 72 commandes de 280 produits.

Le gain réalisé sur le prix d'achat des produits et sur le coût de passation des commandes, n'est pas suffisant pour permettre de compenser le coût supplémentaire de stockage.

En conséquence, ce n'est parce que le fournisseur accorde une remise pour une certaine quantité que cette opération est rentable pour l'entreprise !

VII. Mise en forme du budget des approvisionnements et des stocks

A. Modalités et techniques de la budgétisation

1. Principe

L'entreprise doit choisir entre deux modalités d'approvisionnement :

- Un approvisionnement par quantités variables à dates fixées (dit gestion calendaire),
- Un approvisionnement par quantités constantes à des dates variables (déterminées par le point de commande).

Dans les deux cas, les chiffres du budget peuvent être obtenus par deux techniques :

- Soit à l'aide d'un tableau (méthode dite « *comptable* »),
- Soit à l'aide d'un graphique.

Exemple

La société Appro communique ses prévisions mensuelles de consommation de la matière M (en kg) pour l'année N et le début de l'année N+1 :

Année N											
Janv.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
500	500	800	800	900	800	500	100	1,000	800	500	500

Année N+1			
Janv.	Févr.	Mars	Avril
500	500	800	800

Le stock au 1er janvier s'élève à 2 600 kg de matière M.

1er cas - La société Appro souhaite des livraisons variables à dates fixes.

La période de réapprovisionnement a été fixée à trois mois.

Le délai de livraison est de deux mois.

Les livraisons sont prévues à la fin des mois suivants : mars, juin, septembre et décembre.

La société Appro désire conserver un stock de sécurité représentant la consommation du mois qui suit chaque prochaine livraison potentielle.

2ème cas - La société Appro souhaite des livraisons de quantités constantes à dates variables.

Les quantités prévues sont de 1 925 à chaque livraison (1/4 de la consommation annuelle).

La société APPRO désire conserver un stock de sécurité représentant la consommation du mois suivant.

Le délai de livraison est de deux mois.

2. Technique des tableaux

a. Livraison de quantités variables à dates fixées

Il s'agit en fait de commander des quantités variables à dates régulières.

Il faut, pour cela, déterminer la périodicité optimale, celle par exemple qui est donnée par le modèle de Wilson, puis il faudra trouver pour chaque période les quantités à commander.

Mois	Stock initial	Consommation	Stock final avant livraison	Stock nécessaire (1)	Livraisons en quantités	Stock final rectifié (2)	Date de livraison (3)	Date de commande (4)
01	2,600	500	2,100	-	-	2,100	-	-
02	2,100	500	1,600	-	-	1,600	-	-
03	1,600	800	800	**(a)** 3 000	2,200	3,000	Fin mars	Fin janvier
04	3,000	800	2,200	-	-	2,200	-	-
05	2,200	900	1,300	-	-	1,300	-	-
06	1,300	800	500	**(b)** 2 400	1,900	2,400	Fin juin	Fin avril
07	2,400	500	1,900	-	-	1,900	-	-
08	1,900	100	1,800	-	-	1,800	-	-
09	1,800	1,000	800	**(c)** 2 300	1,500	2,300	Fin septembre	Fin juillet
10	2,300	800	1,500	-	-	1,500	-	-
11	1,500	500	1,000	-	-	1,000	-	-
12	1,000	500	500	**(d)** 2 600	2,100	2,600	Fin décembre	Fin octobre

(1) →Le stock nécessaire doit être calculé uniquement lors des livraisons prévues (ou potentielles).

→ Ici les livraisons potentielles sont donc celles de fin mars, fin juin, fin septembre et fin décembre.

→ Le stock nécessaire = La consommation des 3 mois qui suivent la livraison + SS.

→ Dans cet exercice le SS = Un mois de consommation (celle d'avril, juillet, octobre et janvier).

→ Le principe est le suivant : quand le stock final avant livraison est < au stock nécessaire, il faut une livraison.

(2) → Stock final avant livraison + Livraison

(a) → $\left[\underbrace{800}_{\text{Avril}} + \underbrace{900}_{\text{Mai}} + \underbrace{800}_{\text{Juin}}\right] + \underbrace{500}_{\text{SS-Juillet}}$ = 3 000 → 3 000 > 800 → Livraison fin mars de 2 200.

(b) → $\left[\underbrace{500}_{\text{Juillet}} + \underbrace{100}_{\text{Août}} + \underbrace{1\,000}_{\text{Septembre}}\right] + \underbrace{800}_{\text{SS-Octobre}}$ = 2 400 → 2 400 > 500 → Livraison fin juin de 1 900.

(c) → $\left[\underbrace{800}_{\text{Octobre}} + \underbrace{500}_{\text{Novembre}} + \underbrace{500}_{\text{Décembre}}\right] + \underbrace{500}_{\text{SS-Janvier}}$ = 2 300 → 2 300 > 800 → Livraison fin septembre de 1 500.

(d) → $\left[\underbrace{500}_{\text{Janvier}} + \underbrace{500}_{\text{Février}} + \underbrace{800}_{\text{Mars}}\right] + \underbrace{800}_{\text{SS-Avril}}$ = 2 600 → 2 600 > 500 → Livraison fin décembre de 2 100.

(3) → Dates de livraisons des commandes → Fin des mois de livraisons.

(4) → Date de passation des commandes → 2 mois avant la livraison.

b. Livraison de quantités constantes à dates variables

Mois	Stock initial	Stock nécessaire (1)	Livraisons en quantités	Stock après livraison (2)	Consommation	Stock final (3)	Date de livraison (4)	Date de commande (5)
01	2,600	**(a)** 1 000	-	2,600	500	2,100	-	-
02	2,100	**(b)** 1 300	-	2,100	500	1,600	-	-
03	1,600	**(c)** 1 600	1,925	3,525	800	2,725	30 mars	Fin janvier
04	2,725	**(d)** 1 700	-	2,725	800	1,925	-	-
05	1,925	1,700	-	1,925	900	1,025	-	-
06	1,025	1,300	1,925	2,950	800	2,150	20 juin	20 avril
07	2,150	600	-	2,150	500	1,650	-	-
08	1,650	1,100	-	1,650	100	1,550	-	-
09	1,550	1,800	1,925	3,475	1,000	2,475	23 septembre	23 juillet
10	2,475	1,300	-	2,475	800	1,675	-	-
11	1,675	1,000	-	1,675	500	1,175	-	-
12	1,175	1,000	-	1,175	500	675	-	-

(1) → Le stock nécessaire doit être calculé chaque mois

→ En théorie, le stock nécessaire = La consommation du mois + SS

→ Dans cet exercice le SS = Consommation du mois suivant

→ Le principe est le suivant :

- Quand le stock nécessaire est < au stock initial → Pas de livraison dans le mois,
- Quand le stock nécessaire est > au stock initial → Livraison dans le mois.

Remarque

Par ailleurs, si, par hasard, le stock nécessaire = Le stock initial → Par principe de prudence on fera une livraison.

Toutefois, compte tenu du stock de sécurité une livraison n'est pas « *obligatoire* ».

Donc vous trouverez des auteurs qui décident d'une livraison et d'autres non, dans ce cas particulier !

(2) → SI + Livraison

(3) → Si + Livraison – Consommation

Détail du calcul du « *stock nécessaire* ».

- **(a)** → 500 + 500 = 1 000 → 1 000 < 2 600 → Pas de livraison en janvier,
- **(b)** → 500 + 800 = 1 300 → 1 300 < 2 100 → Pas de livraison en février,
- **(c)** → 800 + 800 = 1 600 → 1 600 = 1 600 → Livraison en mars par principe de prudence,
- **(d)** → 800 + 900 = 1 700 → 1 700 < 2 725 → Pas de livraison en avril.

(4) → Dates de livraisons des commandes

Principe en cas de livraison en quantités constantes :

$$\text{Date de livraison} = \frac{\text{SI} - \text{SS}}{\text{Consommation par jour du mois}}$$

Remarque

Si par hasard, SI – SS est < 0 → La livraison devra avoir lieu le 1er jour du mois. Ceci se présente en général pour le 1er mois car il faut souvent reconstituer le stock de sécurité !

Selon les auteurs et le degré de précision de l'énoncé, on compte ou non les mois pour leur nombre de jours exact.

S'il existe un stock de sécurité, on arrondit (par convention) la date de livraison à l'entier par excès. Si par exemple vous trouvez 10,25, vous indiquerez une livraison le 11 → En fait le stock de sécurité permet de ne pas tomber en rupture de stock pour une journée !

$\text{Pour mars} \rightarrow \frac{1\ 600 - 800}{800/30} = 30$→ Livraison le 30 mars.

$\text{Pour juin} \rightarrow \frac{1\ 025 - 500}{800/30} = 19{,}69$→ Livraison le 20 juin.

$\text{Pour septembre} \rightarrow \frac{1\ 550 - 800}{1\ 000/30} = 22{,}50$ → Livraison le 23 septembre.

(5) → Date de passation des commandes → 2 mois avant la livraison.

3. Technique des graphiques

Les graphiques représentent simultanément :

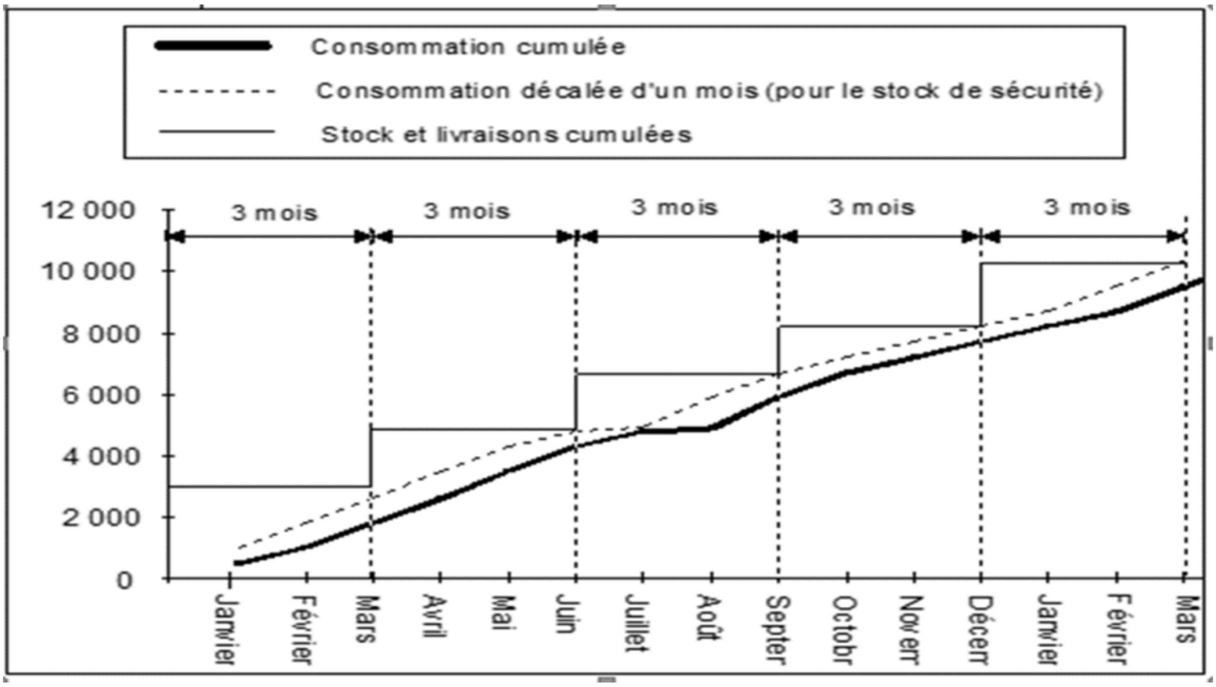
- La consommation cumulée,
- Le stock initial et les livraisons cumulées (courbe en escalier commençant à la hauteur du stock initial).

a. Livraison de quantités variable à dates fixées

Suite de l'exemple.

Tracer une verticale tous les trois mois (période de réapprovisionnement).

Placer une horizontale entre deux verticales. Les horizontales sont à une hauteur telle que leur extrémité droite s'appuie sur la courbe de la consommation (décalée d'un mois vers la gauche pour tenir compte du stock de sécurité).

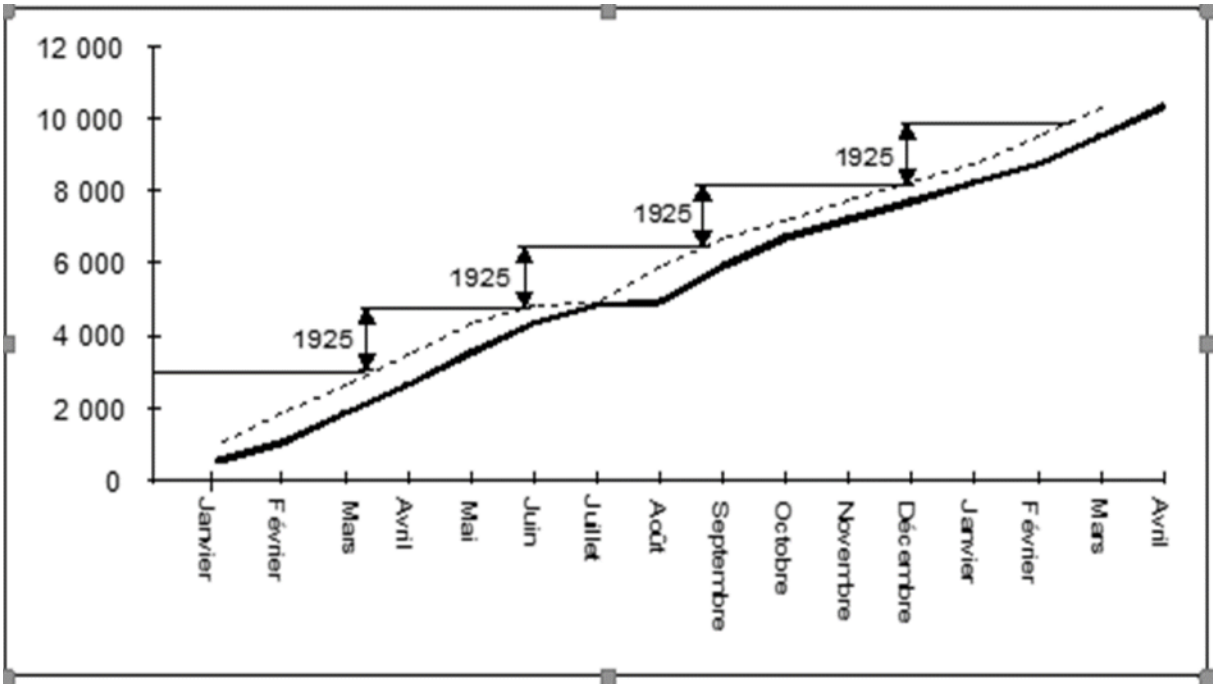


b. Livraison de quantités fixes à des dates variables

Suite de l'exemple

Tracer une verticale de hauteur constante (1 925) chaque fois que l'extrémité droite d'une horizontale rencontre la courbe de la consommation (décalée d'un mois vers la gauche).

Joindre par une horizontale l'extrémité supérieure de chaque verticale et la courbe de la consommation (décalée d'un mois vers la gauche).



B. Présentation du budget

1. Principe

Le budget comprend quatre lignes :

- Commandes,
- Consommations,
- Livraisons,
- Stock (en fin de mois).

Il est valorisé en euros.

2. Exemple

La société Appro décide finalement de commander une quantité variable de matière M tous les trois mois (*cf tableau de livraison variable à date fixée, établi précédemment*).

Il est précisé que le délai de livraison du fournisseur est de deux mois et que le coût d'achat prévisionnel d'un kg de matière est 25,00 €.

Budget des approvisionnements et des stocks de la matière M

	Janv.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Total
Commandes en €	55,000	0	0	47,500	0	0	37,500	0	0	52,500	0	0	192,500
Livraisons en €	0	0	55,000	0	0	47,500	0	0	37,500	0	0	52,500	192,500
Consommations en €	12,500	12,500	20,000	20,000	22,500	20,000	12,500	2,500	25,000	20,000	12,500	12,500	192,500
Stock en € (fin de mois)	52,500	40,000	75,000	55,000	32,500	60,000	47,500	45,000	57,500	37,500	25,000	65,000	

La commande intervient deux mois avant la livraison (pour tenir compte du délai).

Les montants sont obtenus en multipliant les quantités par 25,00 €.

Remarque

Le budget des approvisionnements est un budget d'objectifs.

Il est complété par un budget des frais d'approvisionnements et de stockage (budget de moyens) dans lequel sont chiffrées les charges entraînées par l'approvisionnement et le stockage (coût des entrepôts, du matériel de manutention, des personnels affectés à la gestion des commandes, à la réception au magasinage, à la manutention, etc.).