Le trinôme du second degré

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Table des matières

I. Détermination des racines d'un trinôme du 2nd degré 3

A. Définitions ... 3
1. Rappel écriture d'un trinôme du second degré ... 3
2. Qu'appelle-t-on racine d'un trinôme du 2nd degré ? ... 4

B. Détermination des racines éventuelles d'un trinôme du 2nd degré ... 5
1. Discriminant d'une équation du 2nd degré à une inconnue ... 5
a. Définition ... 5
b. Application ... 6
2. Résolution de l'équation du 2nd degré ... 6
a. Méthodologie ... 6
b. Application ... 7
3. Exemples ... 8

II. Signe et factorisation d'un polynôme du 2nd degré 10

A. Signe du trinôme du 2nd degré ... 10
1. Méthodologie de détermination du signe du trinôme du 2nd degré ... 10
2. Exemples ... 12

B. Factorisation d'un polynôme du 2nd degré ... 14
1. Méthodologie ... 14
2. Exemples ... 15

C. Inéquations du second degré ... 17
1. Définition et but recherché ... 17
2. Méthodologie générale de résolution ... 17
3. Exemples ... 19

III. Exercices d'applications 21

A. Résolution d'équations contenant des polynômes ... 21
1. Exemple 1 ... 21
2. Exemple 2 ... 23
3. Exemple 3 ... 26

B. Étude du signe d'expressions contenant des polynômes ... 28
1. Exemple 1 ... 28
2. Exemple 2 ... 29

C. Exemple lié à un contexte concret ... 31
1. Énoncé ... 31
2. Correction ... 32
a. Question 1 ... 32
b. Question 2 ... 33
c. Question 3-a ... 35
d. Question 3-b ... 35
e. Question 3-c ... 36
f. Question 3-d ... 37

 Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

I. Détermination des racines d'un trinôme du 2nd degré

A. Définitions

1. Rappel écriture d'un trinôme du second degré

Un **polynôme de degré 2**, noté $P(x)$ est une expression de la variable réelle x qui a la forme suivante : $\boxed{P(x) = ax^2 + bx + c}$

Où :

- a est un nombre **réel non nul ($a \neq 0$)**
- b et c sont des nombres **réels quelconques**
- x est la variable à valeurs réelles

Remarque

Sous sa forme la plus générale, un **polynôme du second degré** est **la somme de 3 monômes**, l'un du second degré (de coefficient **a**), le deuxième du 1^{er} degré (de coefficient **b**) et le troisième de degré 0 (de coefficient **c**).

Étant la **somme de 3 monômes**, on parle très souvent du **Trinôme du 2^{nd} degré.**

Dans la suite du cours, on utilisera indifféremment les termes de **polynôme ou trinôme du 2^{nd} degré.**

Attention !

Un trinôme du 2^{nd} degré **doit toujours avoir un terme en (x^2)**, mais **peut ne pas avoir de termes en (x)** ou **ne pas avoir de constantes**. (Voir exemples ci-dessous)

Exemple

$\boxed{P(x) = -2x^2 + 3x + 5}$ **est un trinôme du 2^{nd} degré avec :** $\begin{cases} a = -2 \\ b = +3 \\ c = +5 \end{cases}$

$\boxed{Q = 5x^2 - x}$ **est un trinôme du 2^{nd} degré avec :** $\begin{cases} a = +5 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$

Car $Q(x)$ peut s'écrire : $Q(x) = 5x^2 - x = \underbrace{+5}_{a}x^2 + \underbrace{(-1)}_{b}x + \underbrace{(0)}_{c}$

Remarque

Ici le trinôme *Q(x)* est bien du second degré, mais **sans constante**.

Exemple

$\boxed{T(x) = 7\,x - 2 - x^2}$ **est un trinôme du 2nd degré avec :** $\begin{cases} a = -1 \\ b = +7 \\ c = -2 \end{cases}$

Car *T(x)* peut s'écrire : $T(x) = -x^2 + 7x - 2 = \underbrace{-1}_{a}x^2 + \underbrace{(+7)}_{b}x + \underbrace{(-2)}_{c}$

Attention

Pour déterminer les coefficients, il faut ordonner le polynôme.

Il serait faux pour ce polynôme de dire : (a = 7) , (b = - 2) et **(c = - 1)**.

N'oubliez pas

- Le nombre **(a)** est le coefficient du terme en **(x^2)**,
- Le nombre **(b)** est le coefficient du terme en **(x)**,
- Le nombre **(c)** est la constante.

Exemple

$\boxed{R(x) = \dfrac{3 - x^2}{4}}$ **est un trinôme du 2nd degré avec :** $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = +\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Car *R(x)* peut s'écrire : $R(x) = \dfrac{3 - x^2}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{x^2}{4} = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4} = \underbrace{-\dfrac{1}{4}}_{a}x^2 + \underbrace{(0)}_{b}x + \underbrace{\dfrac{3}{4}}_{c}$

Remarque

Ici le trinôme *R(x)* est bien du second degré, mais **sans terme en (x)**.

2. Qu'appelle-t-on racine d'un trinôme du 2nd degré ?

Dans le module 3, nous avons déjà vu la définition générale des racines d'un polynôme.

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Rappel **(Voir Module 3-Chapitre 3-Section1-B)**

De manière très générale, les racines d'un polynôme, quel que soit son degré, sont les solutions de l'équation : $P(x) = 0$.

Dans le cas d'un trinôme du 2nd degré, rechercher ses racines revient à résoudre l'équation :

$$P(x) = 0 \text{ soit l'équation : } ax^2 + bx + c = 0$$

Définition **Terminologie**

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée « ***équation du 2nd degré à une inconnue*** ».

Par la suite, **on dira indifféremment, rechercher les racines du trinôme du 2nd degré** ou **résoudre l'équation du 2nd degré** ou encore **rechercher les racines de l'équation du 2nd degré.**

B. Détermination des racines éventuelles d'un trinôme du 2nd degré

Remarque

Nous ne rappellerons pas ici toute la théorie qui a permis de mettre en place la méthode générale de recherche des racines éventuelles d'un trinôme du second degré, mais uniquement les résultats qu'il vous faudra utiliser.

Vous trouverez sans problème sur le NET, si vous le souhaitez, la démonstration théorique.

1. Discriminant d'une équation du 2nd degré à une inconnue

Nous avons vu dans le module 3 qu'un polynôme du 1er degré avait toujours une unique racine.

Il n'en est pas de même pour un polynôme du 2nd degré.

On montre effectivement **qu'un trinôme du 2nd degré a 0, 1 ou 2 racines**, dans le cas où les solutions recherchées sont des nombres réels. (Dans le cas des nombres complexes, non au programme du BTS CGO, on montre qu'un trinôme du 2nd degré a toujours 2 racines).

En écrivant différemment le trinôme du 2nd à l'aide des identités remarquables dans l'optique de le factoriser en produit de 2 polynômes du 1er degré, on détermine **une notion algébrique appelée discriminant** qui permet de trouver les éventuelles racines du trinôme.

Le calcul du discriminant sert à connaître le nombre exact de solutions, leurs valeurs éventuelles et offre une méthode synthétique de résolution.

a. Définition

Définition

Soit le **trinôme du 2nd degré** suivant $P(x) = ax^2 + bx + c$ et **l'équation du 2nd degré (1)** associée $ax^2 + bx + c = 0$.

On appelle **discriminant** du trinôme du 2nd degré ou de l'équation **(1)** le nombre réel, noté Δ (lettre grecque majuscule **Delta**), défini de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Définition **Terminologie**

Oralement on dira souvent au lieu du mot **discriminant** : le **delta** du trinôme du 2nd degré ou de l'équation du 2nd degré est égal à telle ou telle autre valeur.

b. Application

Soit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = x^2 + x - 20$.

Pour ce polynôme : $\boxed{a = +1}$; $\boxed{b = +1}$; $\boxed{c = -20}$

Le discriminant est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (1) \times (-20) = 1 + 80$$

Finalement : $\boxed{\Delta} = b^2 - 4ac = \boxed{81}$

2. Résolution de l'équation du 2nd degré

a. Méthodologie

Le nombre de racines dépend du signe du discriminant.

- Si le discriminant ou delta est **négatif**, le trinôme du 2nd degré n'a **pas de racines**,
- Si le discriminant ou delta est **nul**, le trinôme du 2nd degré a **une seule racine réelle**,
- Si le discriminant ou delta est **positif** le trinôme du 2nd degré a **2 racines réelles.**

Méthode **Comment rechercher les racines d'un trinôme du 2nd degré ?**

Soit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = ax^2 + bx + c$

Et l'équation du 2nd degré (1) : $ax^2 + bx + c = 0$

1ère étape : on calcule de discriminant **delta :**

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

2ème étape : on calcule les racines éventuelles selon les trois cas suivants :

1er cas

$\boxed{\Delta < 0}$ soit Δ *négatif* $\rightarrow \begin{cases} P(x) \text{ n'a pas de racines} \\ \text{L'équation (1) n'a pas de solution} \quad S = \emptyset \end{cases}$

2ème cas

$\boxed{\Delta = 0}$ soit Δ nul $\rightarrow \begin{cases} P(x) \text{ a 1 racine} \quad \boxed{x_0 = -\dfrac{b}{2a}} \\ \text{L'équation (1) a 1 solution} \quad S = \left\{ -\dfrac{b}{2a} \right\} \end{cases}$

3ème cas

$\boxed{\Delta > 0}$ soit Δ positif $\rightarrow \begin{cases} P(x) \text{ a 2 racines} \quad \boxed{x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \text{ et } \boxed{x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \\ \text{L'équation (1) a 2 solutions} \quad S = \left\{ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \,;\, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right\} \end{cases}$

b. Application

On reprend le polynôme dont on a calculé le discriminant précédemment (Section 2-A-2).

$P(x) = x^2 + x - 20$ avec $\boxed{\Delta = 81}$ donc **positif.** $\boxed{\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9}$

On est donc dans le 3ème cas de figure.

Le trinôme a 2 racines : $\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(+1)-9}{2\times(+1)} = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_1 = -5}$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(+1)+9}{2\times(+1)} = \frac{-1+9}{2} = \frac{+8}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = +4}$$

Fondamental **Conclusion**

- Le trinôme du 2nd degré $\boxed{P(x) = x^2 + x - 20}$ **a 2 racines** $\boxed{x_1 = -5}$ *et* $\boxed{x_2 = +4}$
- L'équation du 2nd degré $\boxed{x^2 + x - 20 = 0}$ a **2 solutions** $S = \{-5 ; +4\}$

3. Exemples

Exemple 1

Déterminer les racines du trinôme $\boxed{A(x) = 3x^2 - 2x + 11}$

Pour ce polynôme $\boxed{a = +3}$; $\boxed{b = -2}$; $\boxed{c = +11}$

On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (+3) \times (+11) = 4 - 132 \rightarrow \boxed{\Delta = -128}$ est **négatif.**

On est donc dans le 1er cas de figure.

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Fondamental **Conclusion**

- Le trinôme du 2nd degré $\boxed{A(x) = 3x^2 - 2x + 11}$ **n'a pas de racines**
- L'équation du 2nd degré $\boxed{3x^2 - 2x + 11 = 0}$ **n'a pas de solutions** $S = \emptyset$

Exemple 2

Déterminer les racines du trinôme $\boxed{B(x) = - x2 + 8x - 16}$

Pour ce polynôme $\boxed{a = -1}$; $\boxed{b = +8}$; $\boxed{c = -16}$

On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4 \times (-1) \times (-16) = 64 - 64 \rightarrow \boxed{\Delta = 0}$ est **nul.**

On est donc dans le 2ème cas de figure avec : $\boxed{\sqrt{\Delta} = 0}$

Le trinôme a 1 unique racine : $x_1 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{+8}{2 \times (-1)} = \dfrac{-8}{-2} = +4 \rightarrow \boxed{x_1 = +4}$

Fondamental **Conclusion**

- Le trinôme du 2nd degré $\boxed{B(x) = -x^2 + 8x - 16}$ a **1 racine** $\boxed{x_1 = +4}$
- L'équation du 2nd degré $\boxed{-x^2 + 8x - 16 = 0}$ a **1 solution** $S = \{+4\}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Exemple 3

Déterminer les racines du trinôme $\boxed{C(x) = -x^2 + 8x + 9}$

Pour ce polynôme $\boxed{a = -1}$; $\boxed{b = +8}$; $\boxed{c = +9}$

On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4 \times (-1) \times (+9) = 64 + 36 \rightarrow \boxed{\Delta = 100}$ est **positif.**

On est donc dans le 3ème cas de figure avec : $\boxed{\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10}$

Le trinôme a 2 racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(+8) - 10}{2 \times (-1)} = \dfrac{-8 - 10}{-2} = \dfrac{-18}{-2} \rightarrow \boxed{x_1 = +9}$

et

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(+8) + 10}{2 \times (-1)} = \dfrac{-8 + 10}{-2} = \dfrac{+2}{-2} \rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

Fondamental **Conclusion**

- Le trinôme du 2nd degré $\boxed{C(x) = -x^2 + 8x + 9}$ a **2 racines** $\boxed{x_1 = +9}$ et $\boxed{x_2 = -1}$
- L'équation du 2nd degré $\boxed{-x^2 + 8x + 9 = 0}$ a **2 solutions** $S = \{-1 ; +9\}$

II. Signe et factorisation d'un polynôme du 2nd degré

A. Signe du trinôme du 2nd degré

1. Méthodologie de détermination du signe du trinôme du 2nd degré

Soit un trinôme du 2nd degré : $P(x)\ ax^2 + bx + c$ et son Delta $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

1er cas

Le discriminant **delta est négatif** $\boxed{\Delta < 0}$

Rappel

On rappelle que dans ce cas le trinôme *P(x)* **n'a pas de racines** et on montre que le trinôme du 2nd degré **est de signe constant** sur tout l'ensemble des réels et ce signe est le même que le coefficient **(a).**

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Ceci peut être résumé par le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$P(x)$	Signe de (a)

$2^{ème}$ cas

Le discriminant **delta est nul** : $\boxed{\Delta = 0}$

Rappel

On rappelle que dans ce cas le trinôme *P(x)* **a une racine** $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$

On montre que le trinôme du 2^{nd} degré *P(x)* :

- **Est de signe constant** sur toutes les valeurs réelles différentes de x_0 et ce signe est le même que le coefficient **(a)**.
- **Est nul** pour x_0 : $P(x_0) = 0$.

Ceci peut être résumé par le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	$x_0 = -b / 2a$	$+\infty$
$P(x)$	**Signe de (a)**	**0**	**Signe de (a)**

$3^{ème}$ cas

Le discriminant delta est positif : $\boxed{\Delta > 0}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Rappel

On rappelle que dans ce cas le trinôme *P(x)* **a 2 racines** x_1 *et* x_2

(On supposera ici que $\boxed{x_1 < x_2}$)

On montre que le trinôme du 2^{nd} degré *P(x)*:

- **Est du signe du coefficient (a) à l'extérieur des racines** c'est-à-dire pour les valeurs de la variable : $x \in]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$,
- **Est du signe de (- a) à l'intérieur des racines** c'est-à-dire pour les valeurs de la variable : $x \in]x_1\,;x_2[$,
- **Est nul** pour les deux racines x_1 et x_2 : $P(x_1) = 0$ et $P(x_2) = 0$.

Ceci peut être résumé par le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	**Signe de (a)**	**0**	**Signe de (- a)**	**0**	**Signe de (a)**

2. Exemples

On reprend les trois exemples du (**Chapitre 1- Section 2-C**)

Exemple 1

Signe du trinôme $\boxed{A(x) = 3x^2 - 2x + 11}$

Pour ce polynôme : $\begin{cases} \Delta = -128 \text{ négatif} \rightarrow A(x) \text{ n'a pas de racines} \\ a = +3 \rightarrow a \text{ est positif} \end{cases}$

Remarque

Le polynôme *A(x)* aura toujours **un signe positif**, c'est-à-dire que quelle que soit la valeur donnée à *x* **l'expression** ($3x^2 - 2x + 11$) **sera toujours un nombre positif.**

 Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Ceci peut être résumé par le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$A(x)$	+

Exemple 2

Signe du trinôme $\boxed{B(x) = -x^2 + 8x - 16}$

Pour ce polynôme : $\begin{cases} \Delta = 0 \text{ nul} \rightarrow B(x) \text{ a 1 racine } \boxed{x_0 = 4} \\ a = -1 \rightarrow a \text{ est négatif} \end{cases}$

Complément

Le polynôme *B(x)* :

- **Est négatif** (signe de **a = - 1**) pour toutes les valeurs réelles $x \neq 4$,
- **Est nul** pour $x_0 = 4$: $P(4) = 0$.

Ceci peut être résumé par le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		$x_0 = +4$		$+\infty$
$B(x)$		-	0	-	

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Exemple 3

Signe du trinôme $\boxed{C(x) = -x^2 + 8x + 9}$

Pour le polynôme $C(x)$:

$$\begin{cases} \Delta = 100 \text{ positif} \rightarrow C(x) \text{ a 2 racines } \boxed{x_1 = -1} \text{ et } \boxed{x_2 = +9} \\ a = -1 \rightarrow a \text{ est négatif} \end{cases}$$

Complément

Le polynôme $C(x)$:

- **Est négatif** (signe de **a = - 1**) **à l'extérieur** des 2 racines $x_1 = -1$ et $x_2 = +9$,
- **Est nul** pour $x_1 = -1$ et $x_2 = +9$: $C(-1) = C(+9) = 0$,
- **Est positif** (signe de **- a = - (- 1)** **à intérieur** des 2 racines $x_1 = -1$ et $x_2 = +9$.

Ceci peut être résumé par le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		$x_1 = -1$		$x_2 = +9$		$+\infty$
$C(x)$		-	**0**	+	**0**	-	

B. Factorisation d'un polynôme du 2nd degré

1. Méthodologie

Soit un trinôme du 2nd degré : $P(x)\ ax^2 + bx + c$ et son Delta $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

1er cas

Le discriminant **delta est négatif** $\boxed{\Delta < 0}$

Remarque

Le trinôme **n'a pas de racines** et **n'est pas factorisable**.

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

2ème cas

Le discriminant **delta est nul** : $\boxed{\Delta = 0}$

Rappel

On rappelle que dans ce cas le trinôme *P(x)* **a une racine** $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$

Le trinôme *P(x)* **est factorisable et :** $\boxed{P(x) = a\,(x - x_0)^2}$

On dit que $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$ est **racine double du trinôme**

3ème cas

Le discriminant delta est positif : $\boxed{\Delta > 0}$

Rappel

On rappelle que dans ce cas le trinôme du 2nd degré *P(x)* :

A 2 racines : $\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ *et* $\boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$

Le trinôme P (x) est factorisable : $\boxed{P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$

2. Exemples

On reprend les trois exemples du (**Chapitre 1- Section 2-C**).

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Exemple 1

Trinôme $\boxed{A(x) = 3x^2 - 2x + 11}$

Remarque

Le polynôme *A(x)* n'ayant **pas de racine**, n'est **pas factorisable**.

Exemple 2

Trinôme $\boxed{B(x) = -x^2 + 8x - 16}$

Pour ce polynôme : $\begin{cases} \Delta = 0 \text{ nul} \rightarrow B(x) \text{ a 1 racine } \boxed{x_0 = 4} \\ a = -1 \end{cases}$

Remarque

Le polynôme $B(x)$, ayant la seule racine $\boxed{x_0 = 4}$ est **factorisable**.

$B(x) = a\,(x - x_0)$ avec $\boxed{a = -1}$ et $\boxed{x_0 = 4}$

Soit $\boxed{B(x) = -(x - 4)^2}$

Exemple 3

Trinôme $\boxed{C(x) = -x^2 + 8x + 9}$

Pour le polynôme $C(x)$: $\begin{cases} \Delta = 100 \text{ positif} \rightarrow C(x) \text{ a 2 racines } \boxed{x_1 = -1} \text{ et } \boxed{x_2 = +9} \\ a = -1 \end{cases}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Remarque

Le polynôme $C(x)$, ayant 2 racines $\boxed{x_1 = -1}$ et $\boxed{x_2 = +9}$, est **factorisable**.

$C(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ avec $\boxed{a = -1}$

Soit : $C(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = (-1)\,(x - (-1))\,(x - 9)$

Finalement : $\boxed{C(x) = -\,(x + 1)\,(x - 9)}$

C. Inéquations du second degré

1. Définition et but recherché

Définition

Une inéquation d'inconnue *x* est dite du 2nd degré si elle peut se ramener par des transformations régulières à l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{l} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c \geq 0 \end{array} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \text{ réel non nul soit } a \neq 0 \\ b \text{ et } c \text{ réels quelconques} \end{array} \right.$$

On remarque que le **1er membre** de l'inéquation est **un trinôme du 2nd degré.**

Rappel

On rappelle que résoudre une inéquation de ce type revient à déterminer les valeurs de la variable x qui vérifient ladite inéquation.

2. Méthodologie générale de résolution

On ne peut pas résoudre directement une inéquation du second degré comme on l'a fait dans le cas d'inéquations du 1er degré en utilisant juste les règles de calcul sur les inéquations.

On a remarqué que le premier membre de l'inéquation était un trinôme du 2nd degré.

L'inéquation $\boxed{ax^2 + bx + c \ \substack{\leq \\ < \\ > \\ \geq}\ 0}$ peut s'écrire $\boxed{P(x) \ \substack{\leq \\ < \\ > \\ \geq}\ 0}$

Résoudre une inéquation du 2nd degré passe par l'étude du signe du trinôme du 2nd degré du 1er membre de cette inéquation.

Remarque

- Résoudre $\boxed{P(x) < 0}$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme du 2nd $P(x)$ **prend des valeurs strictement négatives (-),**
- Résoudre $\boxed{P(x) \leq 0}$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme du 2nd $P(x)$ **prend des valeurs négatives ou nulles (- ou = 0),**
- Résoudre $\boxed{P(x) > 0}$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme du 2nd $P(x)$ **prend des valeurs strictement positives (+),**
- Résoudre $\boxed{P(x) \geq 0}$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme du 2nd $P(x)$ **prend des valeurs positives ou nulles (+ ou = 0).**

D'où la méthodologie de résolution suivante :

Comment résoudre une inéquation du 2nd degré ?

Soit l'inéquation du 2nd degré $\boxed{ax^2 + bx + c \ \begin{matrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{matrix} \ 0}$

Soit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = ax^2 + bx + c$

Résoudre $\boxed{ax^2 + bx + c \ \begin{matrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{matrix} \ 0}$ est équivalent à résoudre P(x) $\boxed{\begin{matrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{matrix}}$ 0

1ère étape : détermination du signe du trinôme du 2nd degré

a) On calcule de discriminant **delta** $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

b) On détermine les racines éventuelles,

c) On dresse le tableau de signe du trinôme du 2nd degré *P(x).*

2ème étape : résolution de l'inéquation

Suivant le type de l'inéquation $\boxed{< \, ; \leq \, ; > \, ; \geq}$ on sélectionne, dans le tableau de signe du trinôme du 2nd degré *P(x)*, les intervalles de valeurs de la variable *x* correspondant respectivement aux signes $\boxed{(-)\ ;\ (- \ ou = 0)\ ;\ (+)\ ;\ (+ \ ou = 0).}$

(On utilise les correspondances formulées dans la remarque ci-dessus).

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

3. Exemples

Exemple 1

Résoudre l'inéquation $\boxed{5x^2 - 3x\ 14 \leq 0}$

On définit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = 5x^2 - 3x - 14$

1ère étape : détermination du signe du trinôme

Pour ce polynôme : $\boxed{a = +5 \text{ positif}}$; $\boxed{b = -3}$; $\boxed{c = -14}$

a) On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (+5) \times (-14) = 9 + 280 \rightarrow \boxed{\Delta = 289}$ est **positif**

b) On calcule les racines :

On est donc dans le 3ème cas de figure avec : $\boxed{\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17}$

Le trinôme a 2 racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) - 17}{2 \times (+5)} = \dfrac{+3 - 17}{10} = \dfrac{-14}{10} \rightarrow \boxed{x_1 = -1{,}4}$

et

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) + 17}{2 \times (+5)} = \dfrac{+3 + 17}{10} = \dfrac{+20}{10} \rightarrow \boxed{x_2 = +2}$

c) On dresse le tableau de signes : $\boxed{a = +5 \quad \text{positif}}$

x	- ∞		- 1,4		+ 2		+ ∞
P(x)		+	0	-	0	+	

$\boxed{P(x) \text{ négatif}}$

2ème étape : résolution de l'inéquation

On cherche à résoudre l'inéquation $5x^2 - 3x\ 14 \leq 0$ **soit** $P(x) \leq 0$, ce qui revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $P(x)$ prend **des valeurs négatives ou nulles**, valeurs correspondant à l'intervalle associé à la case grisée du tableau.

$\boxed{5x^2 - 3x\ 14 \leq 0 \text{ pour } x \in [-1{,}4\ ;+2]}$ **ou** $\boxed{S = [-1{,}4\ ;+2]}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Exemple 2

Résoudre l'inéquation $\boxed{6x^2 - 2x + 5 > 0}$

On définit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = 6x^2 - 2x + 5$

1ère étape : détermination du signe du trinôme

Pour ce polynôme $\boxed{a = +6 \quad positif}$; $\boxed{b = -2}$; $\boxed{c = +5}$

a) On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (+6) \times (+5) = 4 - 120 \rightarrow \boxed{\Delta = -116}$ est **négatif.**

b) On calcule les racines :

Ici le polynôme n'a pas de racines.

c) On dresse le tableau de signes : $\boxed{a = +6 \quad positif}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$P(x)$	+

2ème étape : résolution de l'inéquation

On cherche à résoudre l'inéquation $6x^2 - 2x + 5 > 0$ **soit** $P(x) > 0$, ce qui revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $P(x)$ prend **des valeurs positives.**

D'après le tableau de signes, le trinôme $P(x)$ **est toujours positif** donc **l'inéquation est toujours vérifiée**, quelle que soit la valeur donnée à la variable x.

$\boxed{6x^2 - 2x + 5 > 0 \text{ est vraie pour tout } x \in R}$ **ou** $\boxed{S = R =]-\infty ; +\infty[}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Exemple 3

Résoudre l'inéquation $\boxed{-9x^2 + 30x - 25 > 0}$

On définit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = -9x^2 + 30x - 25$

1ère étape : détermination du signe du trinôme

Pour ce polynôme : $\boxed{a = -9 \quad \text{négatif}}$ $\boxed{b = +30}$ $\boxed{c = -25}$

a) On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = b^2 - 4ac = (+30)^2 - 4 \times (-9) \times (-25) = 900 - 900 \rightarrow \boxed{\Delta = 0}$ est **nul.**

b) On calcule les racines :

Le trinôme a 1 unique racine : $x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{+30}{2 \times (-9)} = \frac{-30}{-18} = +\frac{5}{3} \rightarrow \boxed{x_0 = +\frac{5}{3}}$

c) On dresse le tableau de signes : $\boxed{a = -9 \quad \text{négatif}}$

x	$-\infty$		$+5/3$		$+\infty$
$P(x)$		-	0	-	

2ème étape : résolution de l'inéquation

On cherche à résoudre l'inéquation $-9x^2 + 30x - 25 > 0$ **soit** $P(x) > 0$, ce qui revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $P(x)$ prend **des valeurs positives**.

D'après le tableau de signes, le trinôme $P(x)$ est **toujours négatif ou nul**, donc **l'inéquation n'est jamais vérifiée**, quelle que soit la valeur donnée à la variable x.

L'inéquation proposée n'a donc pas de solution.

$\boxed{-6x^2 - 2x + 5 > 0 \text{ est fausse pour tout } x \in R}$ **ou** $\boxed{S = \varnothing}$

III. Exercices d'applications

A. Résolution d'équations contenant des polynômes

1. Exemple 1

Résoudre l'équation suivante : $(6x^2 - 7x + 1)(5x^2 + 9x + 4) = 0 \quad (1)$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Méthode

On remarque que le 1er membre de l'équation (1) est le produit de deux polynômes du 2nd degré *P(x)* et *Q(x)*. Pour que l'équation soit vérifiée, il faut donc que l'un des deux polynômes soit nul.

Résoudre (I) revient à résoudre : $\begin{cases} 6x^2 - 7x + 1 = 0 \quad \text{soit } P(x) = 0 \\ \text{ou} \\ 5x^2 + 9x + 4 = 0 \quad \text{soit } Q(x) = 0 \end{cases}$

Racines du trinôme *P(x)* : $\boxed{P(x) = 6x^2 - 7x + 1}$

Pour ce polynôme : $\boxed{a = +6}$ $\boxed{b = -7}$ $\boxed{c = +1}$

On calcule le discriminant Delta :

$\boxed{\Delta} = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 6 \times 1 = \boxed{25}$ **positif et** $\boxed{\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5}$

P(*x*) **a deux racines :** $\begin{cases} \boxed{x_1} = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7+5}{2 \times 6} = \dfrac{12}{12} = \boxed{1} \\ \boxed{x_2} = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7-5}{2 \times 6} = \dfrac{2}{12} = \boxed{\dfrac{1}{6}} \end{cases}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Racines du trinôme $Q(x)$ **:** $Q(x) = 5x^2 + 9x + 4$

Pour ce polynôme : $a = +5$ $b = +9$ $c = +4$

On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4 \times 5 \times 4 = \boxed{1}$ **positif et** $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

$Q(x)$ a deux racines :

$$\begin{cases} \boxed{x_3} = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 + 1}{2 \times 5} = \dfrac{-8}{10} = \boxed{-\dfrac{4}{5}} \\ \boxed{x_4} = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 - 1}{2 \times 5} = \dfrac{-10}{10} = \boxed{-1} \end{cases}$$

Fondamental **Conclusion**

L'équation $(6x^2 - 7x + 1)(5x^2 + 9x + 4) = 0$ a **4 solutions** $S_1 = \left\{ -1 ; -\dfrac{4}{5} ; +\dfrac{1}{6} ; +1 \right\}$

2. Exemple 2

Résoudre l'équation suivante : ***(x - 5)(3x²* + *5) = (2x - 10)(x²* + *3x - 2)***

Remarque

Il nous faut, en premier lieu, transformer cette équation pour obtenir une équation dont le 1er membre sera un produit de polynômes et dont le second membre sera la valeur 0.

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

$(x - 5)(3x^2 + 5) = (2x - 10)(x2 + 3x - 2)$

$\Longleftrightarrow (x - 5)(3x^2 + 5) - \left(2x - \underset{2 \times 5}{10} \right)(x^2 + 3x - 2) = 0$ **On met (2) en facteur**

$\Longleftrightarrow (x - 5)(3x^2 + 5) - 2(x - 5)(x^2 + 3x - 2) = 0$ **On met (x – 5) en facteur commun**

$\Longleftrightarrow (x - 5)[(3x^2 + 5) - 2(x^2 + 3x - 2)] = 0$

On développe l'expression à l'intérieur du crochet (en rouge)

$\Longleftrightarrow (x - 5)[3x^2 + 5 - 2x^2 - 6x + 4] = 0$ **On simplifie l'expression à l'intérieur du crochet**

Soit : $\boxed{(x - 5)(x^2 - 6x + 9) = 0}$

Conclusion :

$\boxed{(x - 5)(3x^2 + 5) = (2x - 10)(x^2 + 3x - 2)} \Longleftrightarrow \boxed{(x - 5)(x^2 - 6x + 9) = 0 \ (2)}$

Remarque

L'équation obtenue est sous la forme d'un produit de 2 polynômes qui doit être nul.

On applique la même méthode que dans l'exemple 1 précédent.

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Résolution de l'équation : $\boxed{\underbrace{(x-5)}_{P(x)}\,\underbrace{(x^2-6x+9)}_{Q(x)} = 0 \quad (2)}$

Résoudre (2) revient à résoudre : $\begin{cases} x-5=0 \text{ soit } P(x)=0 \\ \text{ou} \\ x^2-6x+9=0 \text{ soit } Q(x)=0 \end{cases}$

Racines du polynôme *P(x)* : $\boxed{P(x) = x - 5}$ C'est un polynôme du 1[er] degré.

On résout l'équation : $P(x)=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

P(x) a 1 seule racine $\boxed{x_0 = +5}$

Racines du polynôme *Q(x)* : $\boxed{Q(x) = x^2 - 6x + 9}$ C'est un polynôme du 2[nd] degré.

Pour ce polynôme : $\boxed{a = +1}$ $\boxed{b = -6}$ $\boxed{c = +9}$

On calcule le discriminant Delta :

$\boxed{\Delta} = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = \boxed{0}$ **nul**

$Q(x)$ a 1 racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2\times 1} = \dfrac{+6}{2} = +3$ soit $\boxed{x_1 = +3}$

Fondamental **Conclusion**

L'équation $\boxed{(x-5)(3x^2+5) = (2x-10)(x^2+3x-2)}$ a **2 solutions** $\boxed{x_0 = +5}$ et $\boxed{x_1 = +3}$

$$\boxed{S_{(2)} = \{+3 \,;\, +5\}}$$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

3. Exemple 3

Résoudre l'équation suivante : $x - 1 = \dfrac{1 + x}{x} \quad (3)$

1ère étape : transformation de l'équation (3)

Il faut tout d'abord **s'assurer que cette équation ait un sens**, c'est-à-dire que le dénominateur du rapport (1/x) ne soit pas nul soit :

$$\boxed{x \neq 0}$$

Remarque

De plus, il nous faut transformer cette équation pour obtenir une équation dont le 1er membre sera, dans ce cas, un rapport de polynômes et dont le second membre sera la valeur 0.

$$x - 1 = \frac{1 + x}{x} \Leftrightarrow x - 1 - \frac{1 + x}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x - 1) - (1 + x)}{x} = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{(3) \quad x - 1 = \frac{1 + x}{x}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2 - 2x - 1}{x} = 0 \quad (3\ bis)}$$

2ème étape : résolution de l'équation (3-bis)

Le 1er membre de l'équation obtenue est un rapport de 2 polynômes.

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = 0} \text{ avec : } \begin{cases} P(x) = x^2 - 2x - 1 \\ Q(x) = x \end{cases}$$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Rappel

$\boxed{\frac{A}{B} = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0}$ **avec bien évidemment** $\boxed{B \neq 0}$

Pour cet exemple, résoudre l'équation (3-bis) revient à résoudre : $\begin{cases} P(x) = 0 \\ \text{avec } x \neq 0 \end{cases}$

Il nous suffit donc de rechercher les racines du polynôme $P(x)$.

Racines du trinôme $P(x)$: $\boxed{P(x) = x^2 - 2x - 1}$

Pour ce polynôme : $\boxed{a = +1}$ $\boxed{b = -2}$ $\boxed{c = -1}$

On calcule le discriminant Delta :

$\boxed{\Delta} = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (+1) \times (-1) = 4 + 4 = \boxed{8}$ **positif et** $\boxed{\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$

Remarque

Le Delta n'est pas un carré parfait.

On garde **la valeur exacte de sa racine carrée** et non une valeur approchée.

$P(x)$ a deux racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+2 - 2\sqrt{2}}{2 \times 1} = \dfrac{\cancel{2}(1 - \sqrt{2})}{\cancel{2}} \text{ soit } \boxed{x_1 = 1 - \sqrt{2}} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+2 + 2\sqrt{2}}{2 \times 1} = \dfrac{\cancel{2}(1 + \sqrt{2})}{\cancel{2}} \text{ soit } \boxed{x_2 = 1 + \sqrt{2}} \end{cases}$

Fondamental **Conclusion**

L'équation $\boxed{x - 1 = \dfrac{1}{x} + 1}$ a **2 solutions** : $\boxed{S(3) = \left\{ \underbrace{1 - \sqrt{2}}_{\approx -0,41} \; ; \; \underbrace{1 + \sqrt{2}}_{\approx +2,41} \right\}}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

B. Étude du signe d'expressions contenant des polynômes

1. Exemple 1

Étudier, suivant les valeurs de *x* le signe l'expression suivante :

$V(x) = (2x^2 - x - 10)(9 - 4x^2)$

Méthode

Il faut ici étudier simultanément le signe des deux trinômes du 2nd degré :

$P(x) = 2x^2 - x - 10$ et $Q(x) = 9 - 4x^2$

Et résumer les résultats obtenus dans un tableau récapitulatif de signes.

- **Signe de :** $P(x) = 2x^2 - x - 10$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = +2$ $b = -1$ $c = -10$

Ici : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (2) \times (-10) = 81$ **positif** avec : $\sqrt{\Delta} = 9$

$P(x)$ a deux racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+1-9}{2 \times 2} = \dfrac{-8}{4} \text{ soit } \boxed{x_1 = -2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+1+9}{2 \times 2} = \dfrac{+10}{4} \text{ soit } \boxed{x_2 = +\dfrac{5}{2} = +2{,}5} \end{cases}$

- **Signe de :** $Q(x) = 9 - 4x^2$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = -4$ $b = 0$ $c = +9$

Ici : $\Delta = (0)^2 - 4 \times (-4) \times (9) = 144$ positif avec : $\sqrt{\Delta} = 12$

$Q(x)$ a deux racines : $\begin{cases} x_3 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0-12}{2 \times (-4)} = \dfrac{-12}{-8} \text{ soit } \boxed{x_3 = +\dfrac{3}{2} = +1{,}5} \\ x_4 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0+12}{2 \times (-4)} = \dfrac{+12}{-8} \text{ soit } \boxed{x_4 = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5} \end{cases}$

D'où le tableau de signes :

Pour le polynôme P(x) : $a = +2$ *positif* et deux racines $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = +2{,}5 \end{cases}$

Pour le polynôme Q(x) : $a = -4$ *négatif* et deux racines $\begin{cases} x_3 = +1{,}5 \\ x_4 = -1{,}5 \end{cases}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Attention

N'oubliez pas de **comparer les valeurs des 4 racines** des 2 polynômes pour **les positionner par ordre croissant** sur la première ligne de votre tableau de signes.

Pour notre exemple 1 : $\boxed{x_1 = -2} < \boxed{x_4 = -1{,}5} < \boxed{x_3 = +1{,}5} < \boxed{x_2 = +2{,}5}$

x	$-\infty$		-2		$-1{,}5$		$+1{,}5$		$+2{,}5$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-		-		-	0	+	
$Q(x)$		-		-	0	+	0	-		-	
$V(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

Fondamental **Conclusion**

L'expression $V(x)$:

- **Est négative** pour $x \in]-\infty\,;-2[\, \cup\,]-1{,}5\,;+1{,}5[\, \cup\,]+2{,}5\,;+\infty[$
- **Est nulle** pour les 4 valeurs $\boxed{x_1 = -2}$; $\boxed{x_4 = -1{,}5}$; $\boxed{x_3 = +1{,}5}$; $\boxed{x_2 = +2{,}5}$
- **Est positive** pour $x \in]-2\,;-1{,}5[\, \cup\,]+1{,}5\,;+2{,}5[$

Remarque :

En conclusion, le tableau de signes suffit amplement.

2. Exemple 2

Étudier, suivant les valeurs de x le signe l'expression suivante :

$$\boxed{W(x) = \frac{5x^2 - 10x - 35}{x^2 - 1}}$$

Méthode

- **Remarquer que** $\boxed{W(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}}$ est le rapport de 2 polynômes du 2nd degré.
- **Étudier** simultanément le **signe** des deux trinômes du 2nd degré :

$\boxed{P(x) = 5x^2 - 10x - 35}$ et $\boxed{Q(x) = x^2 - 1}$

- **Résumer** les résultats obtenus dans un **tableau** récapitulatif de signes.

En positionnant les racines par ordre croissant

Ne pas oublier que l'expression **W(x) n'existe pas** pour **les racines du trinôme Q(x)** et visualiser cette remarque par des **doubles barres** sur la dernière ligne du tableau.

- **Signe de :** $\boxed{P(x) = 5x^2 - 10x - 35}$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $\boxed{a = +5}$ $\boxed{b = -10}$ $\boxed{c = -35}$

Ici : $\Delta = (-10)^2 - 4 \times (5) \times (-35) = 800$ **positif** avec : $\boxed{\sqrt{\Delta} = 20\sqrt{2}}$

$P(x)$ a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10-20\sqrt{2}}{10} = 1-2\sqrt{2} & \boxed{\text{soit } x_1 = 1-2\sqrt{2} \approx -1{,}83} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10+20\sqrt{2}}{10} = 1+2\sqrt{2} & \boxed{\text{soit } x_2 = 1+2\sqrt{2} \approx +3{,}83} \end{cases}$$

- **Signe de :** $\boxed{Q(x) = x^2 - 1}$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $\boxed{a = +1}$ $\boxed{b = 0}$ $\boxed{c = -1}$

Ici : $\Delta = (0)^2 - 4 \times (1) \times (-1) = 4$ positif avec : $\boxed{\sqrt{\Delta} = 2}$

$Q(x)$ a deux racines :

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0-2}{2\times(+1)} = \dfrac{-2}{2} & \text{soit } \boxed{x_3 = -1} \\ x_4 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{0+2}{2\times(+1)} = \dfrac{2}{2} & \text{soit } \boxed{x_4 = +1} \end{cases}$$

D'où le tableau de signes :

Pour le polynôme P(x) : $\boxed{a = +5 \ \text{positif}}$ et deux racines $\begin{cases} x_1 = 1 - 2\sqrt{2} \approx -1{,}83 \\ x_2 = 1 + 2\sqrt{2} \approx +3{,}83 \end{cases}$

***Pour le polynôme Q(x)** :* $\boxed{a = +1 \ \text{positif}}$ *et deux racines* $\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = +1 \end{cases}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Attention

N'oubliez pas de **comparer les valeurs des 4 racines** des 2 polynômes pour **les positionner par ordre croissant** sur la première ligne de votre tableau de signes.

Pour notre exemple 1 : $\boxed{x_1 \approx -1{,}83}$ < $\boxed{x_3 = -1}$ < $\boxed{x_4 = +1}$ < $\boxed{x_2 \approx +3{,}83}$

x	$-\infty$		$-1{,}83$		-1		$+1$		$+3{,}83$		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	|	-	|	-	0	+	
$Q(x)$		+	|	+	0	-	0	+	|	+	
$W(x)$		+	0	-	||	+	||	-	0	+	

Fondamental **Conclusion**

L'expression $W(x)$:

- Est positive pour $x \in]-\infty\,;\,-1{,}83[\; \cup\;]-1\,;\,+1[\; \cup\;]+3{,}83\,;\,+\infty[$
- **Est nulle** pour les 2 valeurs $\boxed{x_1 = -1{,}83}$ et $\boxed{x_2 = +3{,}83}$
- **Est négative** pour $x \in]-1{,}83\,;\,-1[\; \cup\;]+1\,;\,+3{,}83[$
- **N'existe pas** pour les 2 valeurs $\boxed{x_3 = -1}$ et $\boxed{x_4 = +1}$

Remarque :

En conclusion, le tableau de signes suffit amplement.

C. Exemple lié à un contexte concret

1. Énoncé

Une entreprise fabrique un produit, en quantité *x*, exprimée en dizaines de produits.

Le coût associé à la fabrication de *x* dizaines de produits est donné par l'expression :

$$\boxed{C(x) = x^2 - 13x + 57{,}04}$$

Les coûts sont alors exprimés en centaines d'euros.

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

1. Calculer, à l'euro près, le coût d'une production de *14* produits, puis celui d'une production de *64* produits.
2. Déterminer, à l'unité près, les quantités à fabriquer pour que le coût total soit supérieur ou égal à *2 440* €.
3. Chaque produit est vendu à *30* € l'unité. On note *R(x)* la fonction, exprimée en centaines d'euros, représentant le **chiffre d'affaires**procuré par la vente de *x* dizaines de produits.

   a) Expliquer la raison pour laquelle on peut écrire.

   $$\boxed{R(x) = 3x}$$

   b) On note *M(x)* la fonction, exprimée en centaines d'euros, représentant **la marge** procurée par la vente de *x* dizaines de produits.

   On rappelle que la marge représente la différence entre le chiffre d'affaires et les coûts.

   Donner l'expression de *M(x)* en fonction de x.

   c) Déterminer les quantités à fabriquer et vendre afin que la **marge** totale ne dépasse pas *471 €.*

   d) Déterminer les quantités à fabriquer et vendre afin que la marge totale soit supérieure ou égale à *700 €.*

2. Correction

a. Question 1

> Calculer, à l'euro près, le coût d'une production de *14* produits, puis celui d'une production de *64* produits.

Il suffit de calculer la valeur de l'expression *C(x)* pour certaines valeurs de la variable *x* correspondant aux quantités de *14* produits et *64* produits.

Attention **Piège à éviter**

Il faut faire très attention aux unités fournies par l'énoncé.

Dans cet exercice la variable *x* représente les quantités, mais en **dizaines de produits.**

Donc **la quantité de 14 produits** correspond à $\boxed{x = 1{,}4}$ dizaine de produits et **surtout pas *x* =14.**

De même, **la quantité de 64 produits** correspond à $\boxed{x = 6{,}4}$ dizaines de produits et **surtout pas à *x* = 64.**

- **Calcul du coût d'une production de *14* produits**

$$\left.\begin{array}{l} C(x) = x^2 - 13x + 57{,}04 \\ x = 1{,}4 \end{array}\right\} \rightarrow C(1{,}4) = (1{,}4)^2 - (13 \times 1{,}4) + 57{,}04 = \boxed{40{,}8}$$

- **Calcul du coût d'une production de *64* produits**

$$\left.\begin{array}{l} C(x) = x^2 - 13x + 57{,}04 \\ x = 6{,}4 \end{array}\right\} \rightarrow C(6{,}4) = (6{,}4)^2 - (13 \times 6{,}4) + 57{,}04 = \boxed{14{,}8}$$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Fondamental **Conclusion concrète**

Nouveau piège à éviter.

Il faut faire très attention aux unités fournies par l'énoncé.

Dans cet exercice l'expression *C(x)* donne la valeur du coût, mais **centaines d'euros**.

Donc **la valeur** *C(1,4) = 40,8* représente des **centaines d'euros (= 40,8 x 100 €)** et **surtout pas des euros.**

De même, **la valeur** *C(6,4) = 14,8* représente des **centaines d'euros (= 14,8 x 100 €)** et **surtout pas des euros**.

Finalement

Le coût de production de *14* **produits est de** *4 080 €* **et le coût de production de** *64* **produits est de** *1 480 €*.

b. Question 2

Déterminer, à l'unité près, les quantités à fabriquer pour que le coût total soit supérieur ou égal à *2 440 €*.

Le but de cette question est de **déterminer des quantités à fabriquer**, c'est-à-dire que l'on cherche à déterminer **les valeurs à donner à la variable** *x* telles que le coût total (soit l'expression *C(x)*) soit supérieur ou égal à 2 440 €.

Attention **Piège à éviter**

Il faut encore faire très attention aux unités fournies par l'énoncé.

Dans cet exercice l'expression *C*(*x*) donne la valeur du coût, mais en **centaines d'euros.**

Donc *2 440 €* **correspond à** $\boxed{\frac{2\ 440}{100} = 24{,}4}$ **centaines d'euros.**

Il nous faut donc résoudre l'inéquation : $\boxed{C(x) \geq 24{,}4}$

Et surtout pas : $C(x) \geq 2\ 440$.

Résolution de l'inéquation $\boxed{C(x) \geq 24{,}4 \text{ soit } x^2 - 13x + 57{,}04 \geq 24{,}4}$

$$x^2 - 13x + 57{,}04 \geq 24{,}4 \iff x^2 - 13x + 57{,}04 - 24{,}4 \geq 0$$

$$\iff \underbrace{x^2 - 13x + 32{,}64}_{P(x)} \geq 0 \iff \boxed{P(x) \geq 0 \quad \text{soit } P(x) \text{ positif ou nul}}$$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

Méthode

Se rapporter **au Module4 - chapitre 2 - Section 3-B**

On définit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = x^2 - 13x + 32{,}64$

1ère étape : détermination du signe du trinôme

Pour ce polynôme : $\boxed{a = +1 \text{ positif}}$ $\boxed{b = -13}$ $\boxed{c = +32{,}64}$

a) On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = (-13)^2 - 4 \times (+1) \times (+32{,}64) = 169 - 130{,}56 \rightarrow \boxed{\Delta = 38{,}44}$ est **positif**.

b) On calcule les racines : $\boxed{\sqrt{\Delta} = \sqrt{38{,}44} = 6{,}2}$

$P(x)$ a deux racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13-6{,}2}{2\times(+1)} = \dfrac{6{,}8}{2} \text{ soit } \boxed{x_1 = +3{,}4} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{13+6{,}2}{2\times(+1)} = \dfrac{19{,}2}{2} \text{ soit } \boxed{x_2 = +9{,}6} \end{cases}$

c) On dresse le tableau de signes : $\boxed{a = +1 \text{ positif}}$

x	$-\infty$		3,4		9,6		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	

$P(x)$ **positif** — $P(x)$ **positif**

2ème étape : résolution de l'inéquation

On cherche à résoudre l'inéquation $x^2 - 13x + 32{,}64 \geq 0$ **soit** $P(x) \geq 0$, ce qui revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $P(x)$ prend **des valeurs positives ou nulles**, valeurs correspondant aux intervalles associés aux cases grisées du tableau.

$$\boxed{P(x) \geq 0 \text{ pour } x \in]-\infty \,; 3{,}4] \cup [9{,}6 \,; +\infty[}$$

3ème étape : conclusion concrète

$\boxed{x_1 = +3{,}4}$ correspond à une quantité de **3,4 dizaines de produits**, soit **34 produits.**

$\boxed{x_2 = +9{,}6}$ correspond à une quantité de **9,6 dizaines de produits**, soit **96 produits.**

Le coût total de production sera supérieur ou égal à 2 440 € pour une production inférieure ou égale à 34 articles ou une production supérieure ou égale à 96 articles.

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

c. Question 3-a

> **Chaque produit est vendu à *30 €* l'unité. On note *R (x)* la fonction, exprimée en centaines d'euros, représentant le chiffre d'affaires procuré par la vente de *x* dizaines de produits.**
>
> **Monter que** *R(x) = 3x*.

On sait que le chiffre d'affaires est égal au produit du prix de vente unitaire par les quantités vendues.

$$\text{Ici :} \quad \left.\begin{array}{l} \text{Prix} = 30\ € \\ \text{Quantités } x \text{ dizaines} \end{array}\right\} \rightarrow CA = 30 \times (10x) = (300x)\ €$$

Or *R(x)* représente le chiffre d'affaires, non pas en euros, mais en centaines d'euros :

$$R(x) = \frac{300\,x}{100} \rightarrow \boxed{R(x) = 3\,x}$$

d. Question 3-b

> On note *M(x)* la fonction, exprimée en centaines d'euros, représentant **la marge** procurée par la vente de *x* dizaines de produits. Donner l'expression de *M(x)* en fonction de *x*.

On rappelle que la marge représente la différence entre le chiffre d'affaires et les coûts.

$$\left.\begin{array}{l} M(x) = R(x) - C(x) \\ \\ R(x) = 3x \\ \\ C(x) = x^2 - 13x + 57{,}04 \end{array}\right\} \rightarrow M(x) = 3x - (x^2 - 13x + 57{,}04)$$

$$\Leftrightarrow M(x) = 3x - x^2 + 13x - 57{,}04 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{M(x) = -\,x^2 + 16x - 57{,}04}$$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

e. Question 3-c

Déterminer les quantités à fabriquer et vendre afin que la **marge** totale ne dépasse pas *471 €*.

Il nous faut résoudre l'inéquation : $\boxed{M(x) \leq 4{,}71 \Leftrightarrow -x^2 + 16x - 57{,}04 \leq 4{,}71}$

$$-x^2 + 16x - 57{,}04 \leq 4{,}71 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 16x - 57{,}04 - 4{,}71 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{-x^2 + 16x - 61{,}75}_{P(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P(x) \leq 0 \quad \text{soit } P(x) \text{ négatif ou nul}}$$

On définit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = -x^2 + 16x - 61{,}75$.

1ère étape : détermination du signe du trinôme

Pour ce polynôme : $\boxed{a = -1 \text{ négatif}}$ $\boxed{b = +16}$ $\boxed{c = -61{,}75}$

a) On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = (16)^2 - 4 \times (-1) \times (-61{,}75) = 256 - 247 \rightarrow \boxed{\Delta = 9}$ est **positif**.

b) On calcule les racines : $\boxed{\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3}$

$P(x)$ a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-16 - 3}{2 \times (-1)} = \dfrac{-19}{-2} & \text{soit } \boxed{x_1 = +9{,}5} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-16 + 3}{2 \times (-1)} = \dfrac{-13}{-2} & \text{soit } \boxed{x_2 = +6{,}5} \end{cases}$$

c) On dresse le tableau de signes : $\boxed{a = -1 \text{ négratif}}$

x	$-\infty$		$6{,}5$		$9{,}5$		$+\infty$
$P(x)$		-	0	+	0	-	

$\downarrow$	$\downarrow$
$P(x)$ **négatif**	$P(x)$ **négatif**

2ème étape : résolution de l'inéquation

On cherche à résoudre l'inéquation $-x^2 + 16x - 61{,}75 \leq 0$ **soit** $P(x) \leq 0$, ce qui revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $P(x)$ prend **des valeurs négatives ou nulles**, valeurs correspondant aux intervalles associés aux cases grisées du tableau.

$$\boxed{P(x) \geq 0 \text{ pour } x \in \,]-\infty \, ; 6{,}5] \cup [9{,}5 \, ; +\infty[}$$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

3ème étape : conclusion concrète

$\boxed{x_1 = +9{,}5}$ correspond à une quantité de **9,5 dizaines de produits**, soit **95 produits.**

$\boxed{x_2 = +6{,}5}$ correspond à une quantité de **6,5 dizaines de produits**, soit **65 produits.**

La marge sera inférieure ou égale à 471 € pour une production inférieure ou égale à 65 articles ou une production supérieure ou égale à 95 articles.

f. Question 3-d

Déterminer les quantités à fabriquer et vendre afin que la **marge** totale dépasse *700 €*.

Il nous faut résoudre l'inéquation : $\boxed{M(x) > 7 \Leftrightarrow -x^2 + 16x - 57{,}04 > 7}$

$$-x^2 + 16x - 57{,}04 > 7 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 16x - 57{,}04 - 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{-x^2 + 16x - 64{,}04 > 0}_{P(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P(x) > 0 \quad \text{soit } P(x) \text{ positif}}$$

On définit le trinôme du 2nd degré suivant : $P(x) = -x^2 + 16x - 64{,}04$.

1ère étape : détermination du signe du trinôme

Pour ce polynôme : $\boxed{a = -1 \text{ négatif}}$ $\boxed{b = +16}$ $\boxed{c = -64{,}04}$

a) On calcule le discriminant Delta :

$\Delta = (16)^2 - 4 \times (-1) \times (-64{,}04) = 256 - 256{,}16 \rightarrow$ $\boxed{\Delta = -0{,}16}$ est **négatif**.

Le polynôme *P(X)* n'a pas de racines.

b) On dresse le tableau de signes : $\boxed{a = -1 \text{ négatif}}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$P(x)$	-

2ème étape : résolution de l'inéquation

On cherche à résoudre l'inéquation $-x^2 + 16x - 64{,}04 \geq 0$ **soit** $P(x) \geq 0$, ce qui revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $P(x)$ prend **des valeurs positif ou nulles.** Or, d'après le tableau de signes, le polynôme $P(x)$ ne prend que des valeurs négatives.

$\boxed{P(x) \geq 0 \text{ n'a pas de solutions} \qquad S = \varnothing}$

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite

3ème étape : conclusion concrète

La marge totale associée à la vente de ce produit ne sera jamais supérieure ou égale à 700 €.

Tous droits réservés à STUDI - Reproduction interdite