La loi normale

Table des matières

I. Lois à densité

Contexte

La loi normale est une loi de probabilité continue qui permet de modéliser de nombreux phénomènes naturels, sociaux et économiques. La raison de son apparition dans tellement de contextes est le « *théorème de la limite centrée* », qui explique pourquoi les phénomènes aléatoires complexes ont tendance à se comporter comme une loi normale. Les méthodes de calculs de probabilités permettront d'estimer le comportement d'une loi normale. Enfin, une loi normale peut dans certains cas être utilisée pour approximer une loi binomiale, en facilitant beaucoup les calculs. La loi normale fait partie de la famille des lois à densité, dont fait aussi partie la loi uniforme.

A. Généralités

Lois à densité

Les **lois à densité** associent des probabilités à des valeurs réelles. Elles représentent la distribution de variables aléatoires à valeurs réelles (comme par exemple les lois uniformes, ou les lois normales).

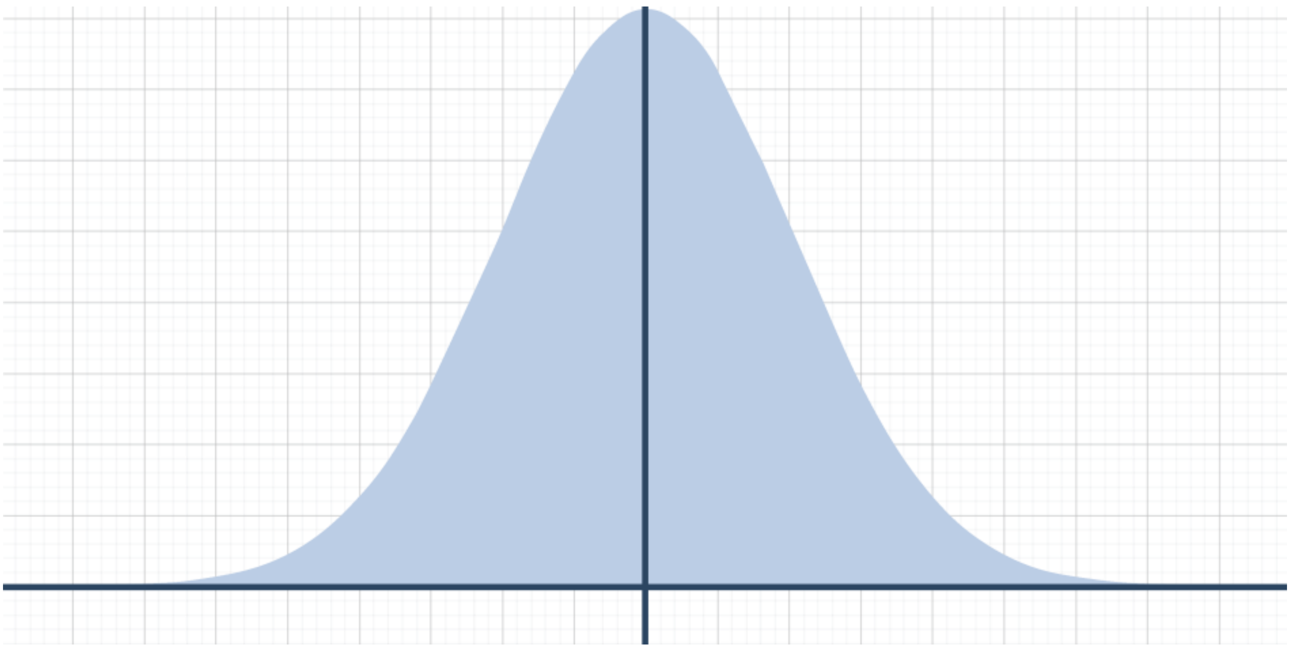
On les différencie des **lois discrètes** qui sont associées aux variables aléatoires à valeurs entières (par exemple la loi binomiale).

Propriété des fonctions de densité

Pour toute fonction de densité de probabilités : la surface entre la courbe et l'axe horizontal est 1.

En effet, la surface sous la courbe représente l'ensemble des probabilités pour toutes les valeurs possibles de notre distribution, donc sa valeur est 1 (la somme de toutes les probabilités).

Donc dans l'exemple ci-dessous (courbe de la fonction de densité d'une loi normale) à surface en bleu vaut 1 :



B. Loi uniforme

Définition

L'illustration la plus simple des lois de probabilité discrètes est la loi uniforme. On la définit par deux paramètres *a* et *b* .

Une variable aléatoire *X* distribuée selon une loi uniforme sur l'intervalle [*a* ; *b*] peut prendre toutes les valeurs possibles dans cet intervalle.

Et chaque valeur possède exactement la même probabilité : $\dfrac{1}{b-a}$

Les valeurs en dehors de l'intervalle possèdent une probabilité nulle.

Définition **Espérance, variance**

L'espérance de la loi uniforme sur l'intervalle [a ; b] est : $\dfrac{b+a}{2}$

Sa variance est : $\dfrac{(a-b)^2}{12}$

Représentation graphique

Voici la représentation graphique de la loi uniforme sur l'intervalle [*a* ; *b*] :

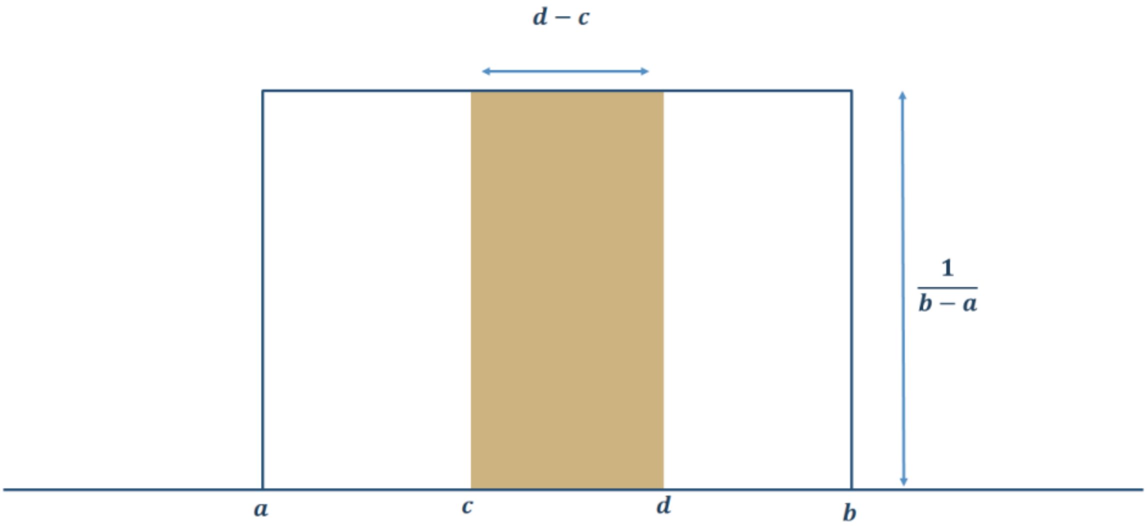
Probabilité d'un intervalle

Soient deux valeurs c et d comprises dans l'intervalle $[a ;b]$. Pour une variable aléatoire X distribuée selon une loi uniforme sur l'intervalle $[a ; b]$ on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{(c - d)}{(b - a)}$$

Représentation graphique

La probabilité $P(c \leq X \leq d)$ correspond à la surface indiquée ici en bleu. Et les côtés de ce rectangle ont les longueurs $(d - c)$ et $\frac{1}{b - a}$ donc l'aire de rectangle est : $\frac{c - d}{b - a}$



Exemple **Calculs de loi uniforme**

Soit *X* une variable aléatoire distribuée selon une loi uniforme sur l'intervalle [*5* ; *15*].

Quelles sont les probabilités suivantes :

$P(2 \leq X \leq 4)$

$P(X \leq 12)$

$P(8 \leq X \leq 13)$

$P(X \leq 20)$

$P(2 \leq X \leq 4) = 0$

Explication : la variable *X* ne peut prendre des valeurs qu'entre 5 et 15.

$$P(X \leq 12) = \frac{12 - 5}{15 - 5} = 0{,}8$$

Explication : chercher la probabilité que X soit inférieure à 12 revient à chercher la probabilité que X soit entre 5 et 12 (car les valeurs inférieures à 5 ont une probabilité nulle).

$$P(8 \leq X \leq 13) = \frac{13-8}{15-5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Explication : ici toutes les valeurs sont dans l'intervalle, on applique directement la formule $P(X \leq 20) = 1$

Explication : toutes les valeurs possibles de X sont inférieures à 15, donc c'est une certitude qu'elles seront toutes inférieures à 20.

C. Loi normale

Définition **Loi normale**

La **loi normale** est une loi de probabilité continue. Elle est définie par deux paramètres : sa **moyenne** notée μ et son **écart-type** noté σ.

On note la loi normale de paramètres μ et σ de la forme : $N(\mu ; \sigma)$.

La loi normale $N(0 ; 1)$ est dite **loi normale centrée réduite.**

Définition **Fonction de densité de probabilité**

La fonction de densité de probabilité de la loi $N(\mu ; \sigma)$ est donnée par la formule :

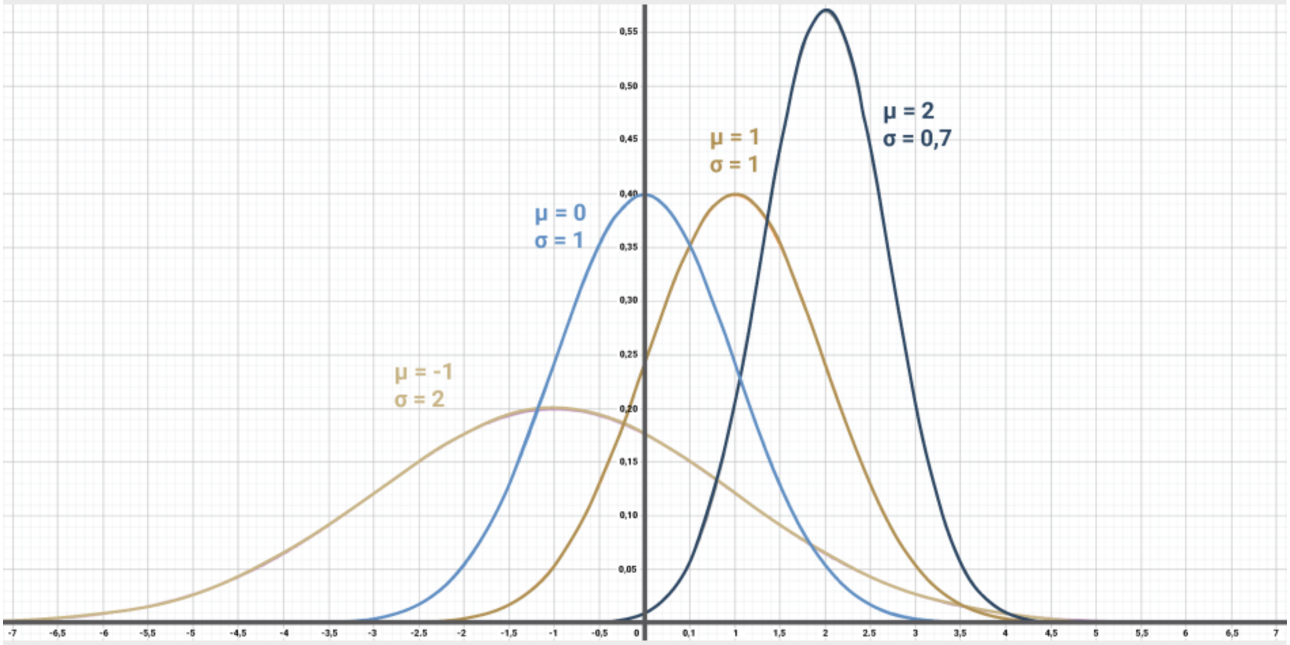
$$f(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Remarque **Formules**

Nous n'avons pas besoin de connaître par cœur cette formule, ou de savoir la manipuler (dans notre contexte, toutes les opérations seront faites à la calculatrice).

Exemple	**Représentation graphique**

Voici quelques exemples de fonctions de densité de probabilité de lois normales (avec des paramètres différents) :



On observe que μ contrôle la « *position* » de chaque courbe. Et σ représente sa dispersion (plus σ augmente, plus la courbe est « *élargie* »).

Propriétés spécifiques à la loi normale

La densité de probabilité d'une loi normale : $N(\mu ; \sigma)$ est symétrique autour de sa moyenne.

De plus μ est aussi la **médiane** de cette loi normale.

Attention	**Moyenne et médiane**

Le fait que la loi normale soit symétrique, et possède une moyenne égale à sa médiane, ne sont pas des règles générales en probabilités et en statistiques.

Le fait qu'un nombre significatif de cas étudiés dans des domaines tels que l'économie, la biologie, les sciences humaines (et de nombreux autres) sont des lois normales (ou assimilés) fait qu'on pourra être tenté de généraliser ces propriétés à d'autres lois de probabilités (par habitude).

Exercice : Quiz

[solution n°1 p.29]

Question 1

Une loi normale possède un seul paramètre, sa moyenne.

- Vrai
- Faux

Question 2

Dans toute loi de probabilité continue, la moyenne et la médiane sont égales.

- Vrai
- Faux

Question 3

Dans une loi uniforme sur un intervalle [*a* ; *b*] toutes les valeurs comprises dans l'intervalle possèdent la même probabilité.

- Vrai
- Faux

Question 4

Si la variable aléatoire X est distribuée selon une loi uniforme sur $[0\,;10]$ alors :
$$P(3 \leq X \leq 4) = \frac{1}{10}$$

- Vrai
- Faux

Question 5

Si la variable aléatoire X est distribuée selon une loi uniforme sur $[-5\,;\,5]$ alors $P(3 \leq X \leq 4) = \frac{1}{10}$

- Vrai
- Faux

III. Calculs de probabilités avec la loi normale

Attention **Tables de loi normale, loi centrée-réduite**

Dans ce contexte, nous présenterons uniquement les méthodes pour obtenir les probabilités d'une loi normale directement à l'aide de la calculatrice. Dorénavant, dans les situations d'évaluation (exemple : BTS CG) tout doit être réalisé à la calculatrice.

Assurez-vous d'utiliser une calculatrice avec les fonctionnalités nécessaires pour réaliser des calculs de probabilités sur les lois normales.

Dans d'autres filières des méthodes permettant de calculer ces probabilités à partir d'un calcul pour « *centrer* » et « *réduire* » une loi normale, suivies d'une recherche dans une « *table de loi normale » sont demandées. Dans ce cas, une « table de loi normale* » est jointe aux sujets de mathématiques ou statistiques.

Si vous préparez un ou plusieurs examens : vérifiez la méthode demandée, et le matériel autorisé.

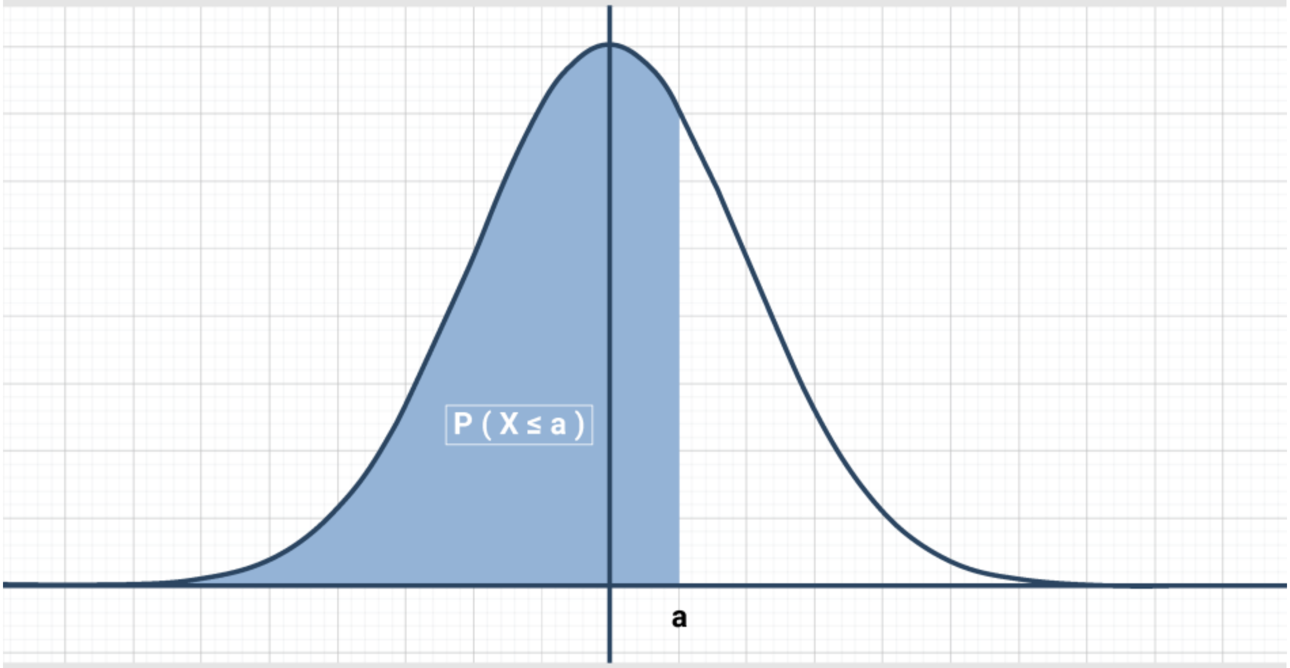
A. Probabilité d'un intervalle

Méthode **Calculer une expression de la forme P(X ≤ a)**

Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi normale $N(\mu ; \sigma)$.

On va se poser la question : quelle est la probabilité que X soit inférieure à une valeur a ?

Visuellement cela revient à chercher la surface correspondante à portion de la courbe à gauche de la valeur a :



Exemple

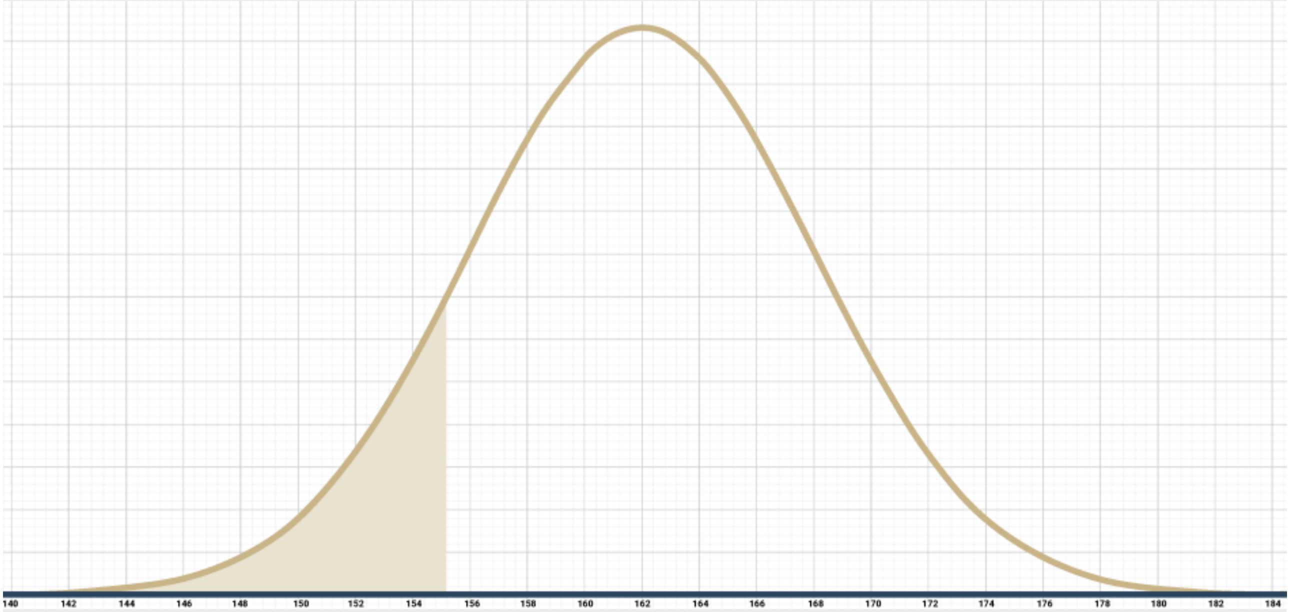
On estime que la taille moyenne d'une femme en France est de 162 cm, avec un écart-type de 6 cm.

Parmi ces femmes, quelle est la proportion dont la taille est 155 cm ou moins ?

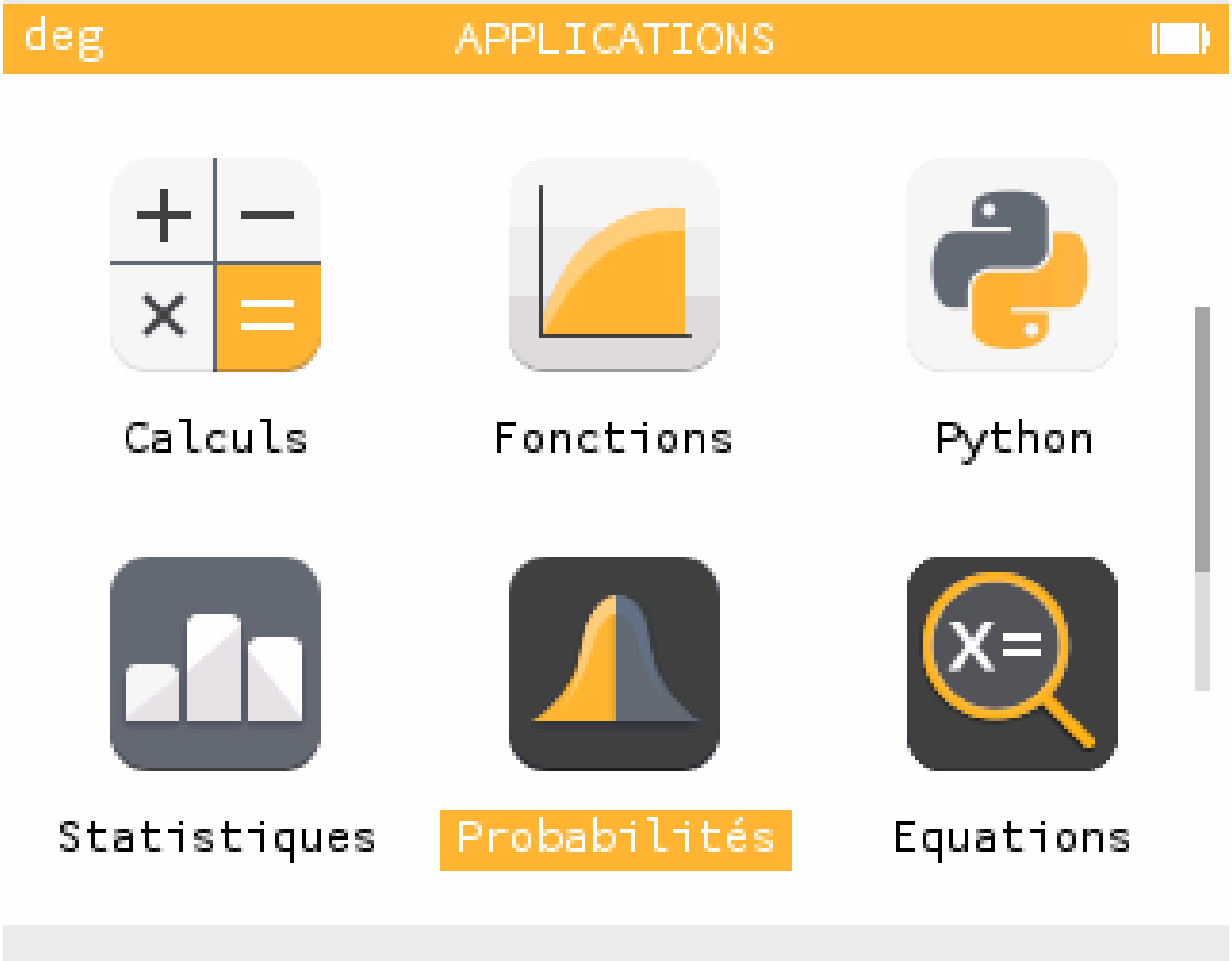
Pour répondre à cette question nous allons utiliser la variable aléatoire X qui représente la taille d'une femme prise au hasard. L'énoncé nous indique que X est distribué selon une loi normale $N(162 ; 6)$.

Rechercher la proportion des femmes de 155 cm et moins correspond à calculer : $P(X \leq 155)$.

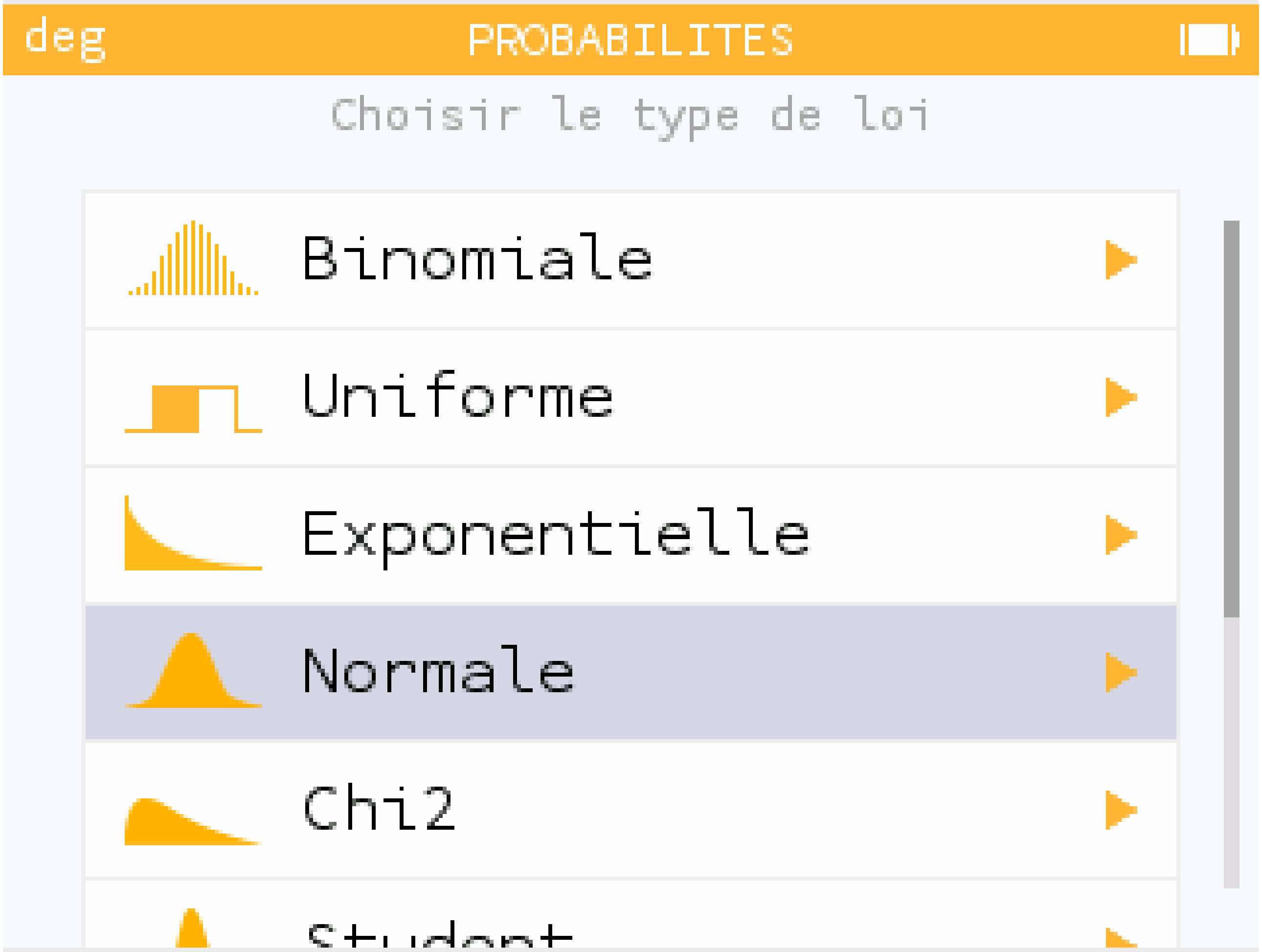
Visuellement, on recherche la surface de la partie en bleu sous la courbe :



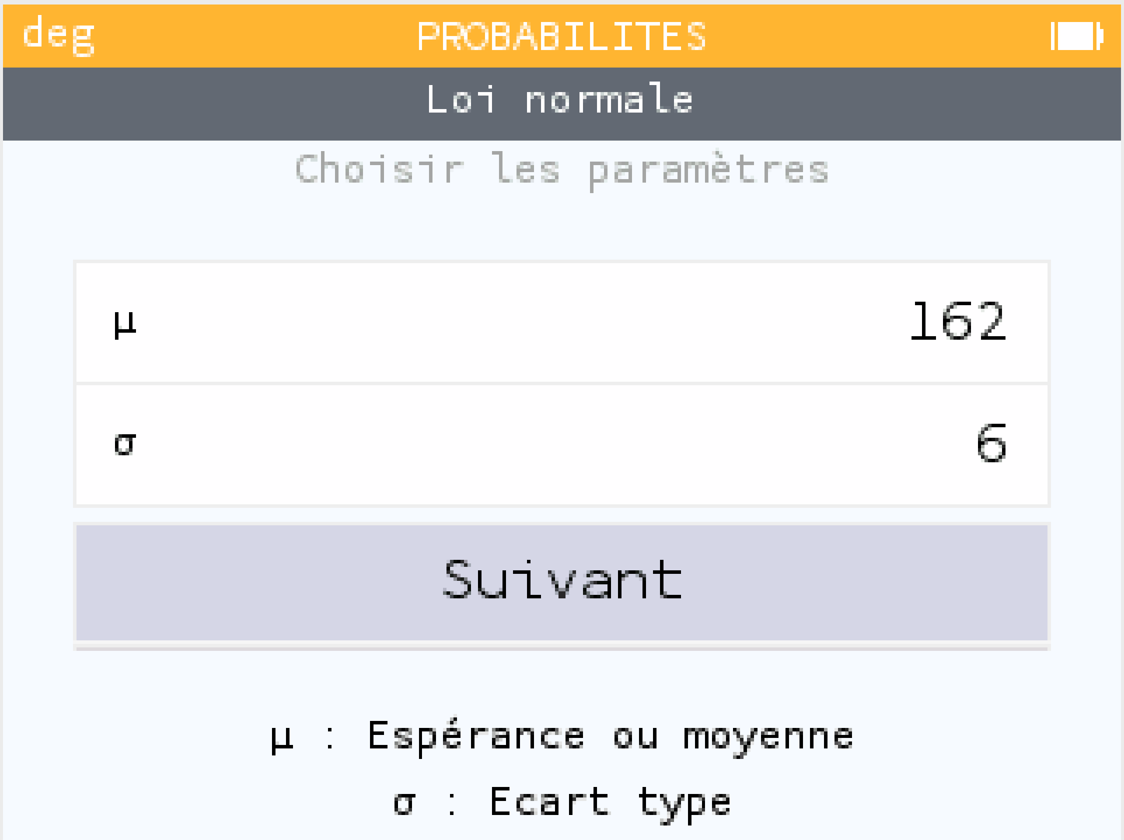
Pour résoudre cela à la calculatrice commençons par choisir le menu « *probabilités* » :



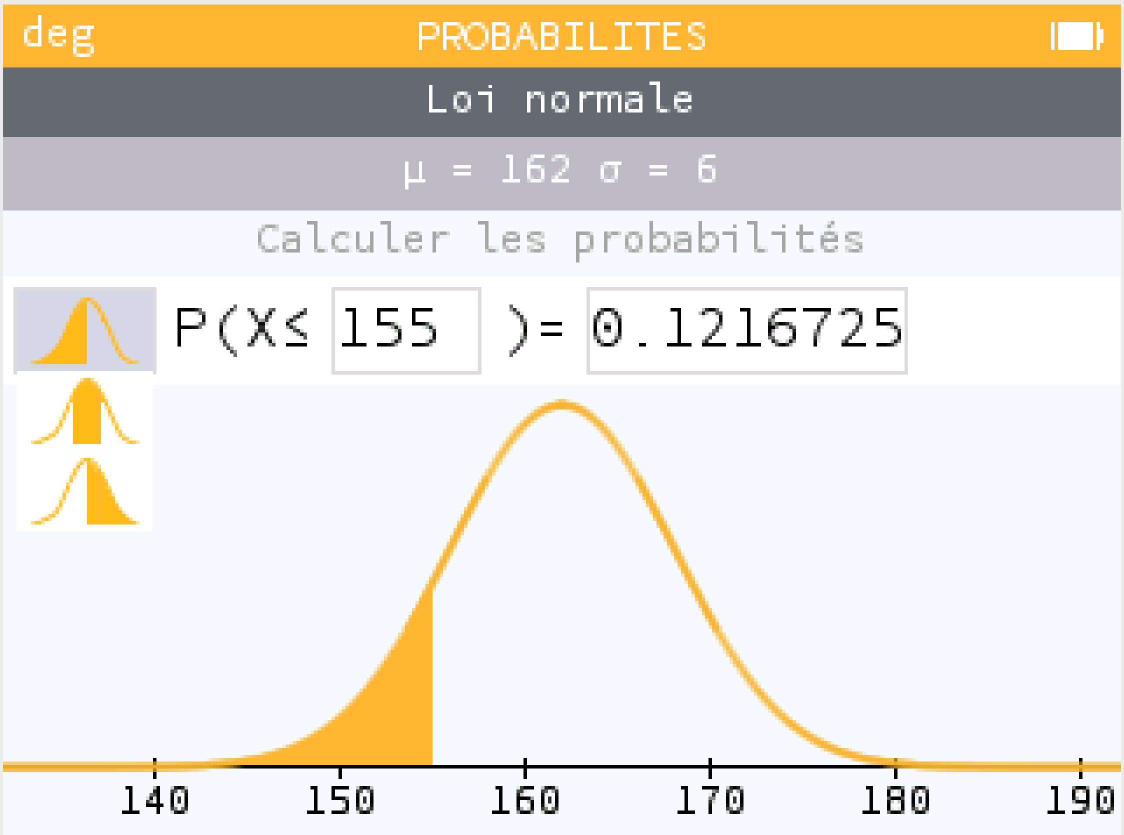
On choisit ensuite la loi normale :



On entre les paramètres :



Enfin on va choisir le type de calcul approprié : $P(X \leq \cdots)$



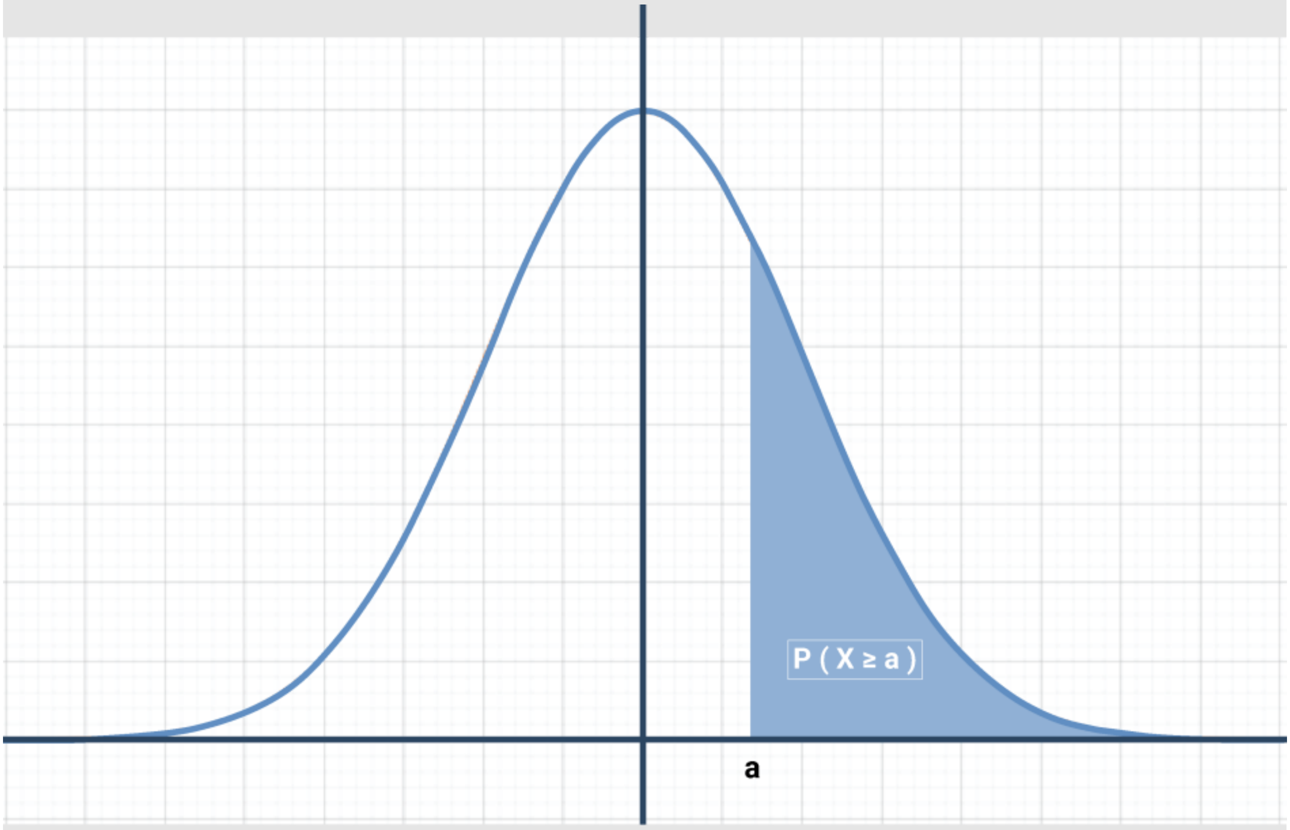
Ce qui nous donne la valeur : $P(X \leq 155) = 0{,}1216725$.

Conclusion : 12,17 % des Françaises font 1 m 55 ou moins.

Méthode **Calcul de P(X ≥ a)**

Certains exercices demanderont des calculs de la forme $P(X \leq a)$.

Commençons par visualiser ce à quoi cela correspond sur la courbe :

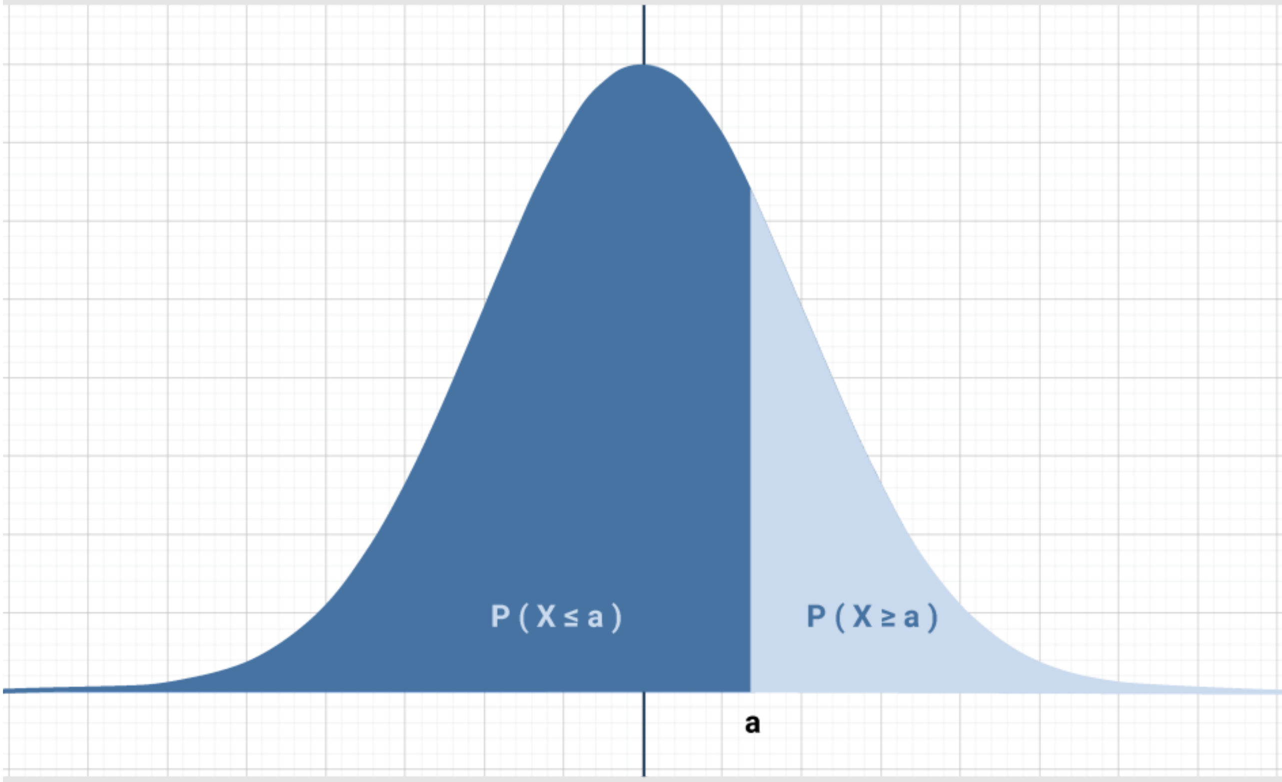


Sur certaines calculatrices, on peut obtenir cette valeur directement.

Autrement on peut remarquer que : $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$

La surface totale sous la courbe vaut 1. Donc : $P(X \leq a) + P(X \geq a) = 1$

Voici l'explication visuelle :

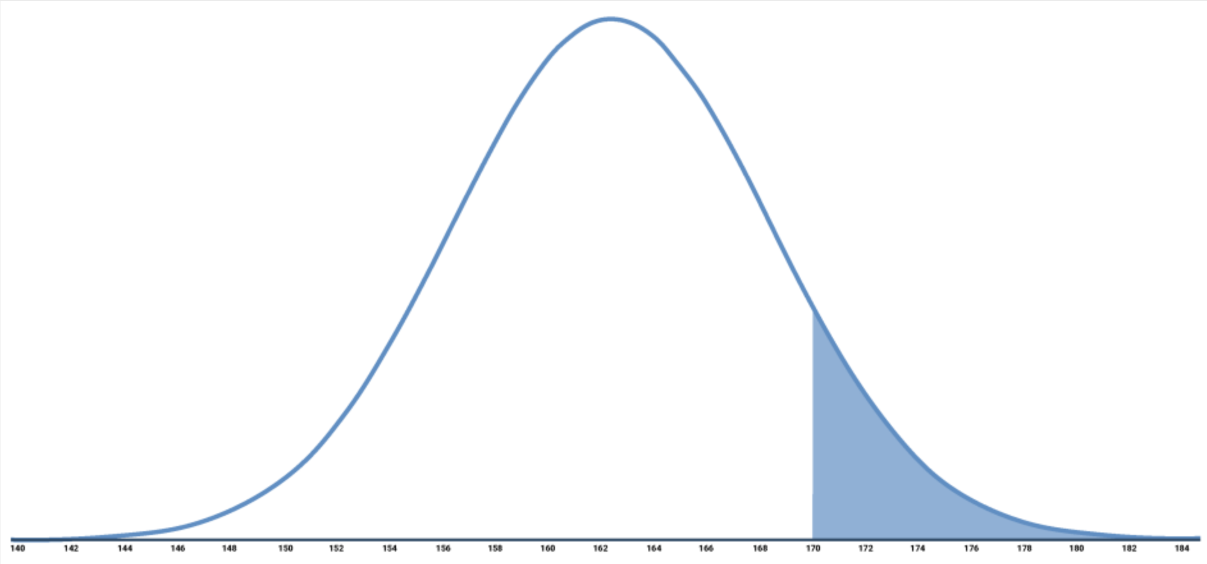


Exemple

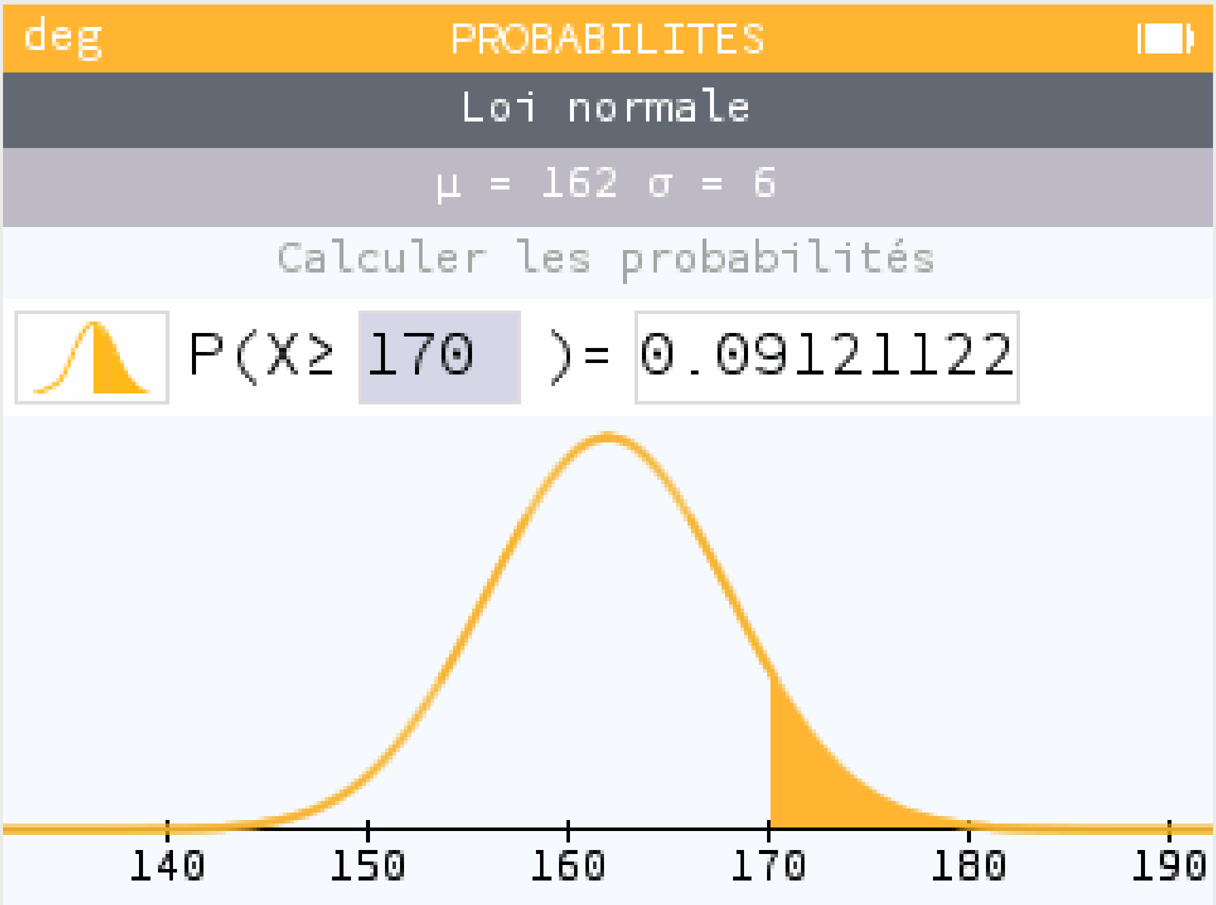
Reprenons notre exemple sur la taille des femmes en France. On recherche maintenant la proportion de femmes dont la taille est supérieure ou égale à 1 m 70.

On rappelle que la taille d'une femme choisie au hasard est modélisée par une variable aléatoire X distribuée selon $N(162\,;6)$.

La proportion recherchée est : $P(X \geq 170)$. Soit :



Certaines calculatrices donneront ce résultat directement (en faisant attention de choisir le bon réglage) :

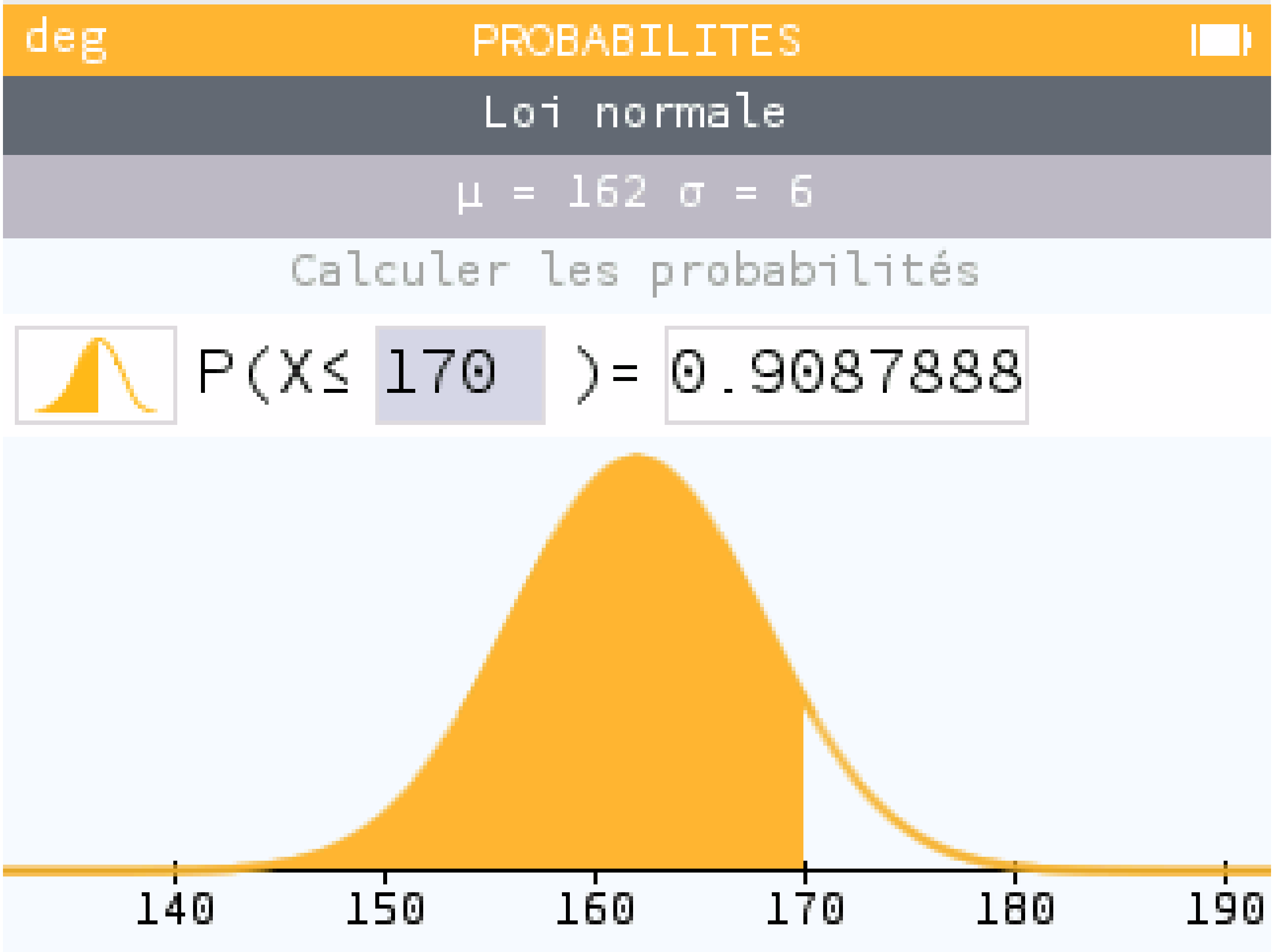


Le résultat obtenu est : $P(X \geq 170) = 0{,}9121122$.

Nous pouvons conclure que 9,1 % des femmes font 1 m 70 ou plus.

Exemple **(Méthode alternative)**

Si on n'a uniquement accès aux calculs de la forme $P(X \geq a)$ on va calculer $1 - P(X \leq 170)$:



Ici la calculatrice nous donne $P(X \leq 170) = 0{,}9087888$.

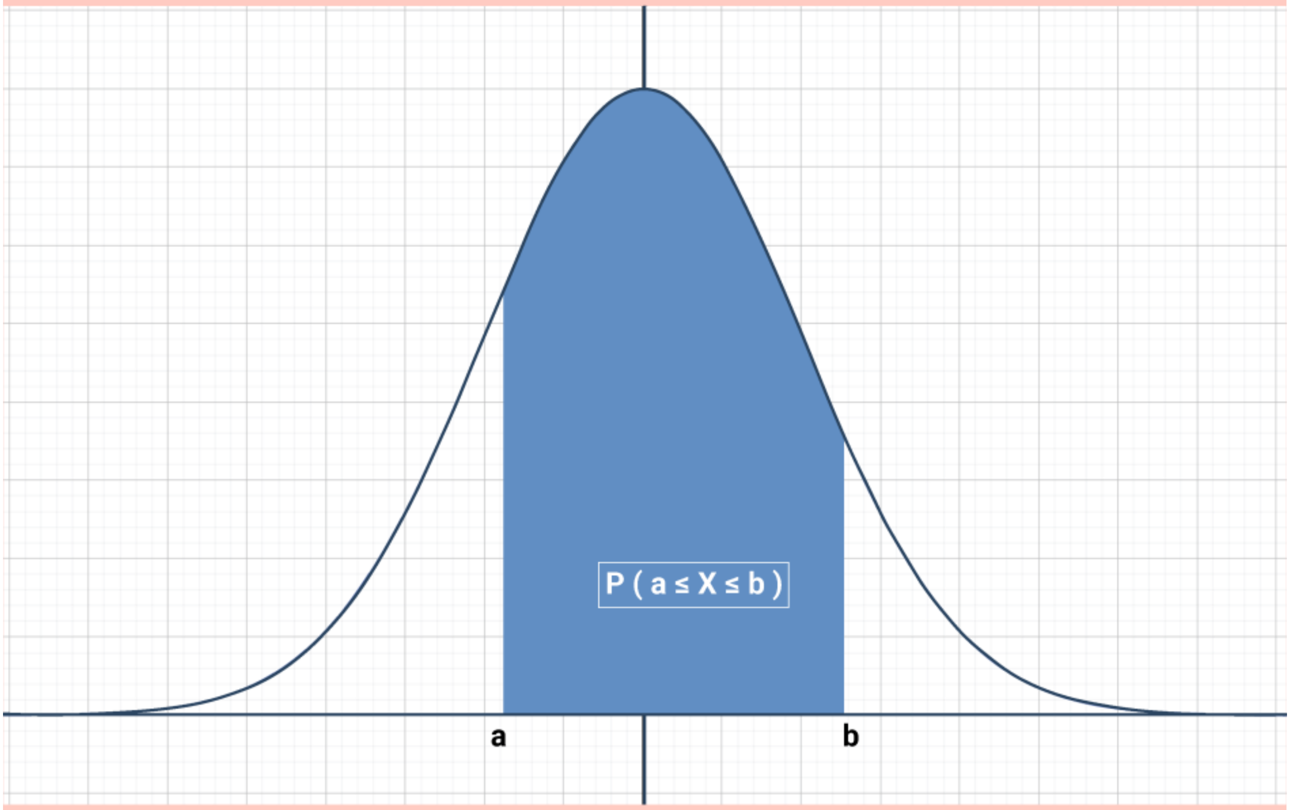
Donc : $P(X \geq 170) = 1 - 0{,}9087888 \approx 0{,}091$

Le résultat obtenu est le même que précédemment, 9,1 % des femmes font 1 m 70 ou plus.

Attention **Calcul de P(a ≥ X ≥b)**

En dernier lieu on pourra avoir à calculer les expressions de la forme $P(a \geq X \geq b)$.

Cela correspond au calcul de cette surface :



Là encore la calculatrice peut vous donner directement le résultat.

Si ce n'est pas le cas convertir cette probabilité en deux calculs plus simples :

$P(a \geq X \geq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$

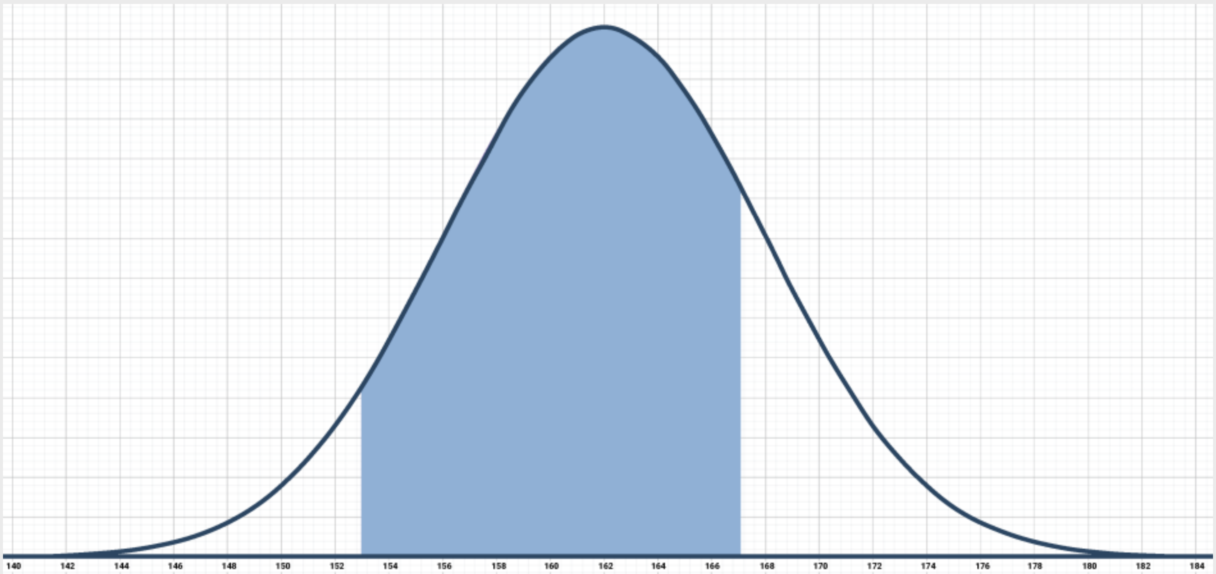
Exemple

On recherche la proportion de femmes dont la taille est comprise entre 153 cm et 167 cm.

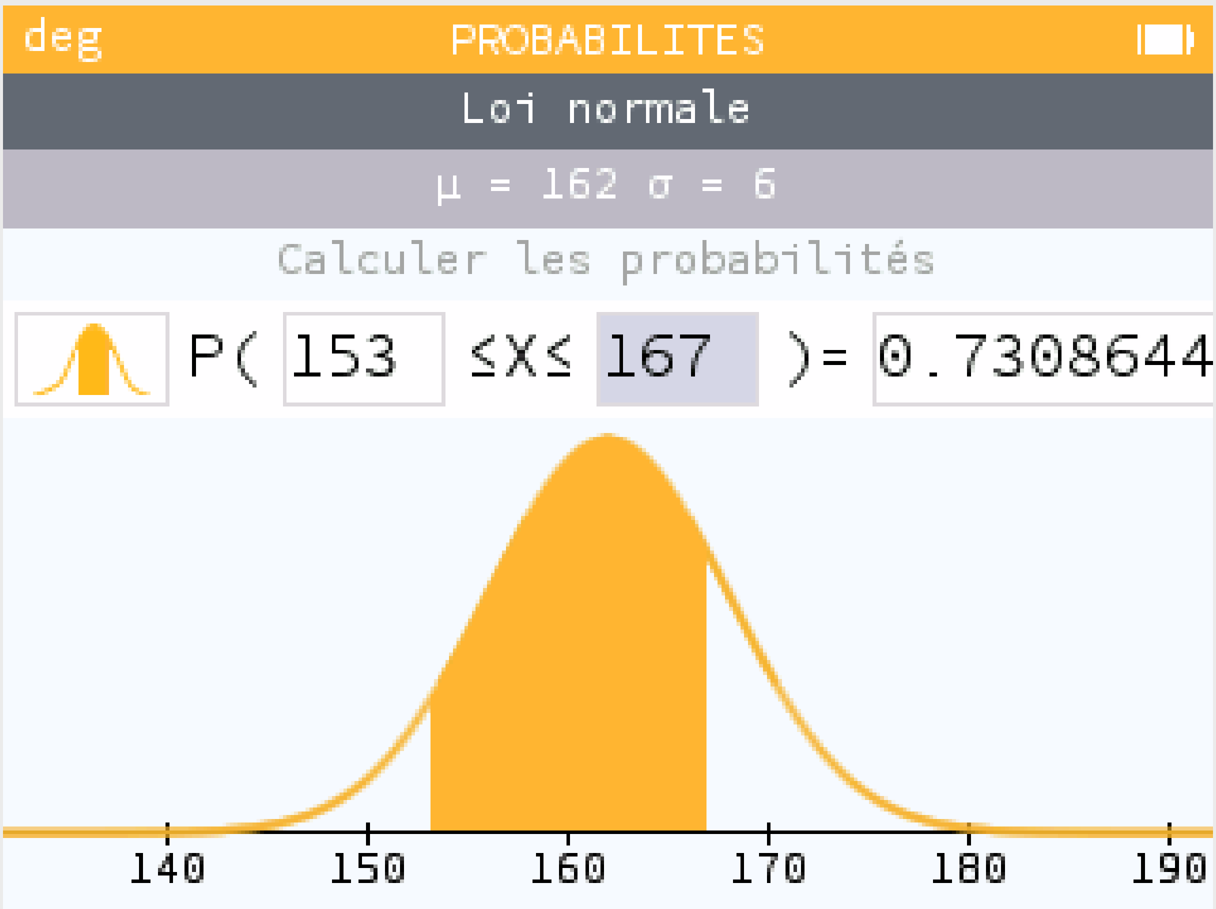
Rappel : la taille d'une femme choisie au hasard est modélisée par une variable aléatoire X distribuée selon $N(162 ; 6)$.

Ici la valeur recherchée est : $P(153 \leq X \leq 167)$.

C'est-à-dire :



La calculatrice nous donne :



Donc : *P(153 ≤ X ≤ 167) = 0,7308644*

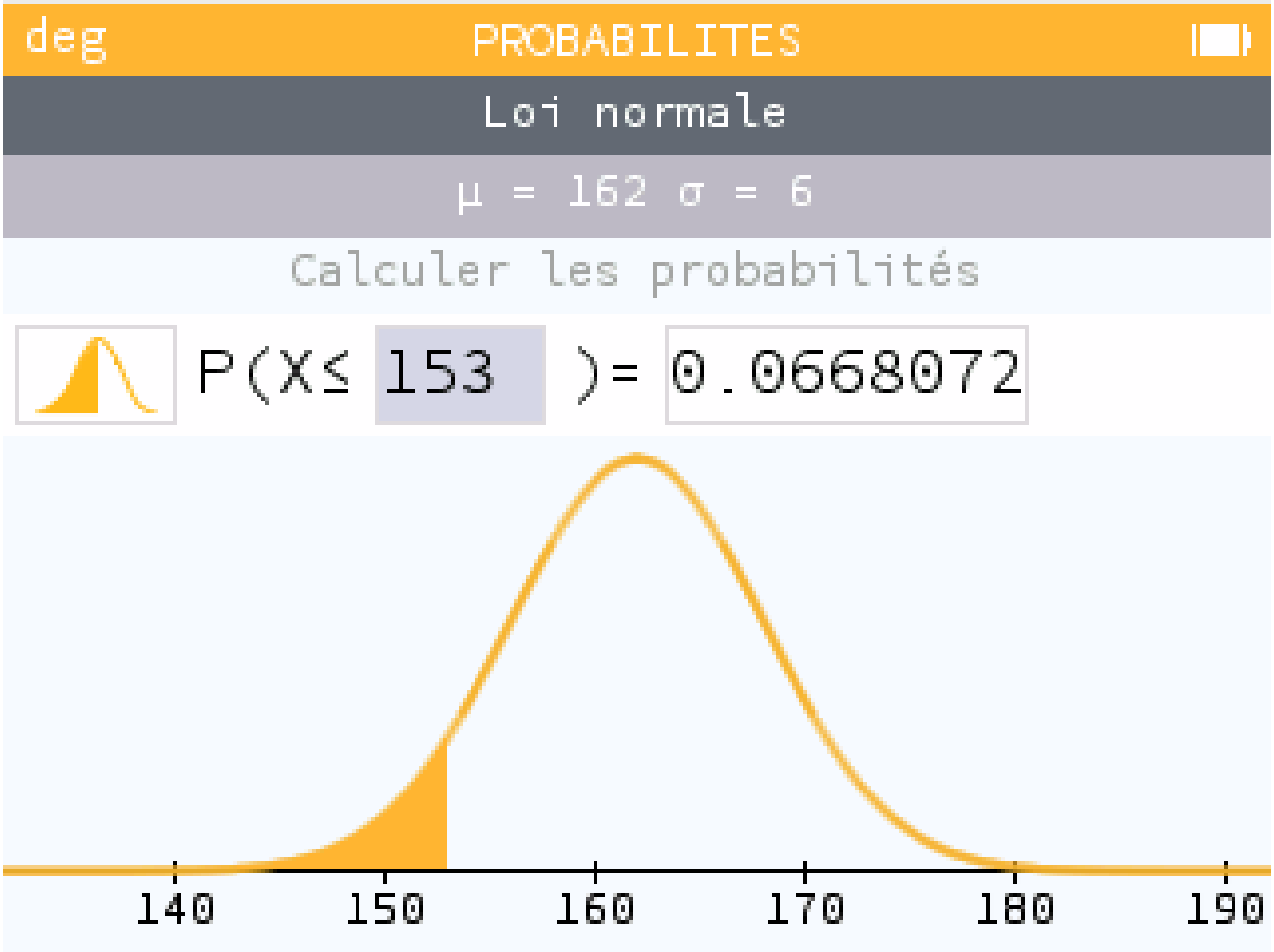
Il y a donc 73,1 % des femmes qui mesurent entre 1 m 53 et 1 m 67.

Exemple **(Méthode alternative)**

Si on ne peut pas obtenir la valeur directement, on peut transformer l'expression :

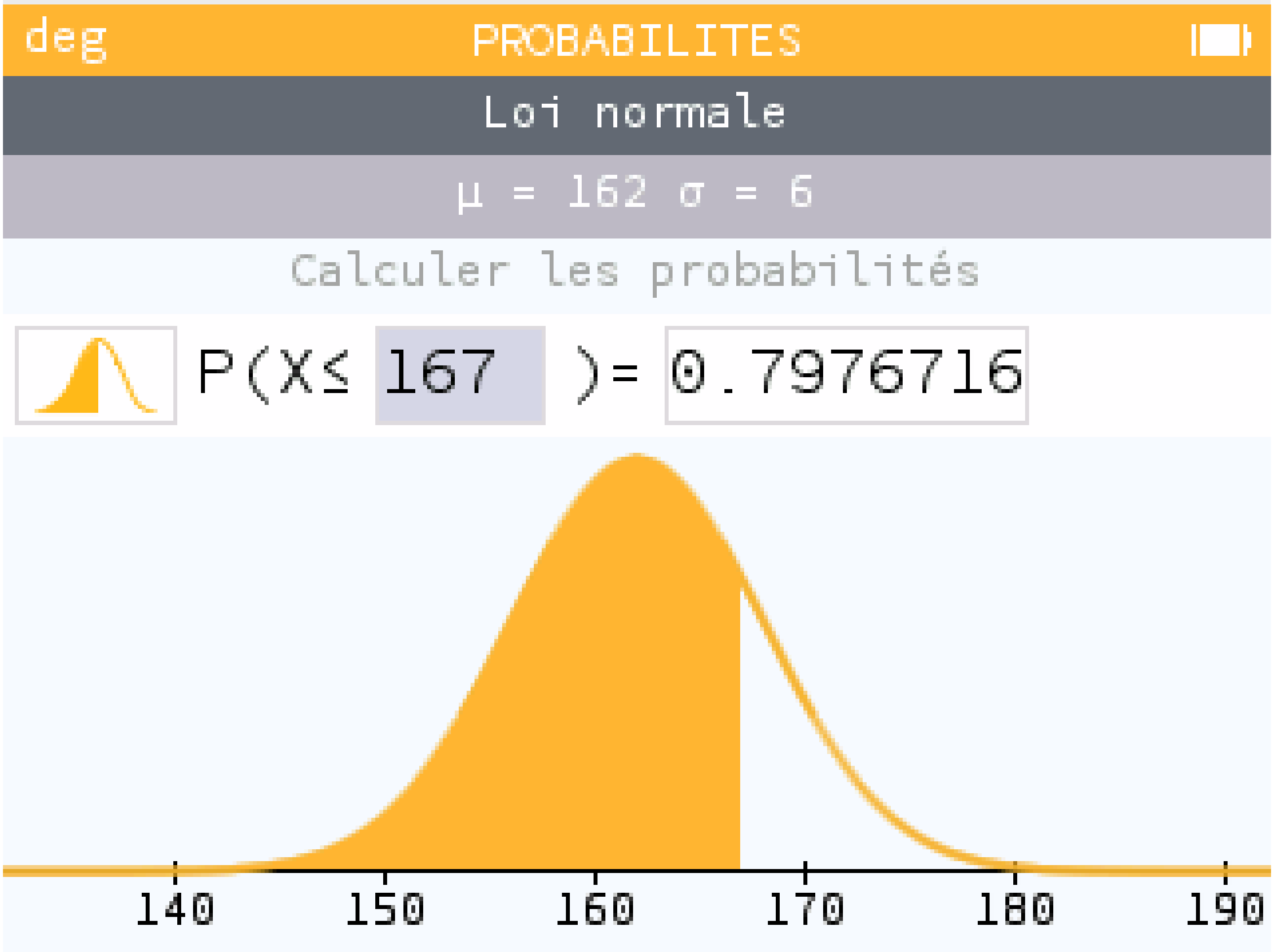
$P(153 \leq X \leq 167) = P(X \leq 167) - P(X \leq 153)$

On calcule ces valeurs :



$P(X \leq 153) = 0{,}0668072$

Et :



P(*X* ≤ 167) = 0,7976716

Donc : *P*(*X* ≤ 167) - *P*(*X* ≤ 153) = 0,7976716 - 0,0668072 = 0,7308644

On retrouve le même résultat, 73,1 % des femmes sont dans l'intervalle entre 153 cm et 167 cm.

Méthode **Valeurs remarquables**

La valeur de la probabilité de certains intervalles pour une loi normale doit être connue par cœur. En effet, certaines questions vous demanderont de répondre « *sans faire de calculs* » à des questions de la forme : $P(a \leq X \leq b)$.

Dans ce cas, il faudra repérer que l'intervalle demandé correspond à une des valeurs remarquables suivantes (pour une variable aléatoire X distribuée selon une loi normale $N(\mu\,;\sigma)$) :

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}68$

$P(\mu - 2\,\sigma \leq X \leq \mu + 2\,\sigma) \approx 0{,}95$

$P(\mu - 3\,\sigma \leq X \leq \mu + 3\,\sigma) \approx 0{,}997$

Remarquez que tous ces intervalles sont centrés autour de la moyenne.

Exemple

La taille d'une femme choisie au hasard est modélisée par une variable aléatoire X distribuée selon $N(162 ; 6)$.

Quelle proportion des femmes étudiées mesurent entre 156 cm et 168 cm ?

Remarquons que cela correspond à $P(162 - 6 \leq X \leq 162 + 6)$. Qui correspond à une expression de la forme $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$. Il y a donc 68 % de femmes entre 156 cm et 168 cm.

Dans quel intervalle centré autour de 162 cm se situent 95 % des femmes étudiées ?

On sait que (pour toute loi normale) : $P(\mu - 2\,\sigma \leq X \leq \mu + 2\,\sigma) \approx 0{,}95$

En remplaçant par les paramètres de X :

$P(162 - 12 \leq X \leq 162 + 12) = P(150 \leq X \leq 174) \approx 0{,}95$

On peut conclure que 95 % des femmes mesurent entre 150 cm et 174 cm.

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Motivation

Historiquement, pour une variable aléatoire X distribuée selon une loi binomiale $B(n ; p)$, le calcul des expressions de la forme $P(X \leq a)$ pouvait être long si la valeur de a est grande.

En effet comme : $P(X \leq a) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = a)$

Il fallait calculer toutes ces probabilités par la formule de la loi binomiale. Si a est de l'ordre de plusieurs centaines, ou plusieurs milliers, c'est peu pratique.

Pour faire face à ces cas, on utilise une méthode qui permet d'obtenir une approximation de la valeur de $P(X \leq a)$ en passant par une loi normale. Ce genre de calculs pouvant se faire en une seule étape avec une loi normale.

Cette méthode est moins utile de nos jours. Ce genre de travail est réalisé à l'aide de logiciels qui permettent d'obtenir une valeur exacte de ces probabilités, sans passer par une approximation. Mais, cela reste une illustration intéressante des similarités entre différentes lois de probabilités (qui sont pourtant de natures différentes).

Méthode **Méthode**

Soit une variable aléatoire X distribuée selon une loi binomiale $B(n ; p)$. Si n est suffisamment grand on peut l'approcher par une variable aléatoire Y distribuée selon une loi normale $N(\mu ; \sigma)$ avec :

$$\mu = E(X) = n\,p$$
$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n\,p(1-p)}$$

Remarque **Critères**

Dans notre contexte, cette méthode est donnée de manière simplifiée. Il ne sera pas demandé de justifier précisément si on peut appliquer ou pas la méthode de l'approximation par une loi normale.

Dans d'autres filières, vous pourrez trouver des cours qui donneront une liste de critères plus longues et complexes pour savoir si on peut appliquer ou pas cette méthode (généralement de 3 à 10 critères selon le domaine d'application).

Méthode **Correction de continuité**

Les lois normales sont des lois continues, et les lois binomiales des lois discrètes. Il faut appliquer une méthode dite de la **correction de continuité** pour prendre cela en compte dans nos calculs.

C'est-à-dire que, pour une variable distribuée selon $B(n\ ;\ p)$ et Y une variable aléatoire distribuée selon une loi normale $N(np\,;\sqrt{np(1-p)})$ permettant d'approcher X, et j,k des entiers quelconques :

$P(X \leq k) \approx P(Y < k + 0{,}5)$

$P(X \geq k) \approx P(Y > k - 0{,}5)$

$P(j \leq X \leq k) \approx P(j - 0{,}5 \leq X \leq k + 0{,}5)$

Remarque **Dans les énoncés**

Certains énoncés vous indiqueront directement les paramètres à utiliser pour votre loi normale. Et il est possible qu'on vous indique directement les valeurs à calculer pour votre loi normale (avec la correction de continuité déjà appliquée). Attention de bien lire ce qui est demandé dans chaque énoncé.

Exemple **D'approximation d'une loi binomiale**

Une entreprise désire réaliser une campagne de prospection commerciale par téléphone. Le but est de proposer à des clients potentiels de recevoir un catalogue de leurs produits (qui leur permettra ensuite de commander).

Cette campagne sera sous-traitée à un centre de téléprospection. La tarification du centre de téléprospection dépend du nombre d'appels qu'on leur demandera d'effectuer.

On estime que 12 % des personnes appelées sont intéressées par l'offre, et vont demander à recevoir un catalogue.

Soit la variable X qui compte le nombre personnes intéressées sur 1 000 appels.

Exemple **Question 1**

Question 1 - quelle est la distribution de X ? Donnez ses paramètres. Calculez son espérance et sa variance.

Réponse : la variable aléatoire X suit une loi binomiale car elle comptabilise le nombre de succès de 1 000 répétitions identiques et indépendantes (assimilables à un tirage avec remise) d'une expérience de Bernoulli à deux issues possibles dont le succès est : « *le client est intéressé* » avec une probabilité $p = 0{,}12$ et l'échec est « *le client n'est pas intéressé* » avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}88$.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $p = 0{,}12$ et $n = 1\,000$.

Son espérance est $E(X) = n\,p = 120$.

Sa variance est : $V(X) = n\,p(1 - p) = 1\,000 \times 0{,}12 \times 0{,}88 = 105{,}6$

Exemple **Question 2**

On décide d’approcher la valeur de par une variable aléatoire distribuée selon une loi normale. Donnez les paramètres de la loi normale en question.

Réponse : *Y* est distribuée selon la loi normale de moyenne : $\mu = E(X) = 120$

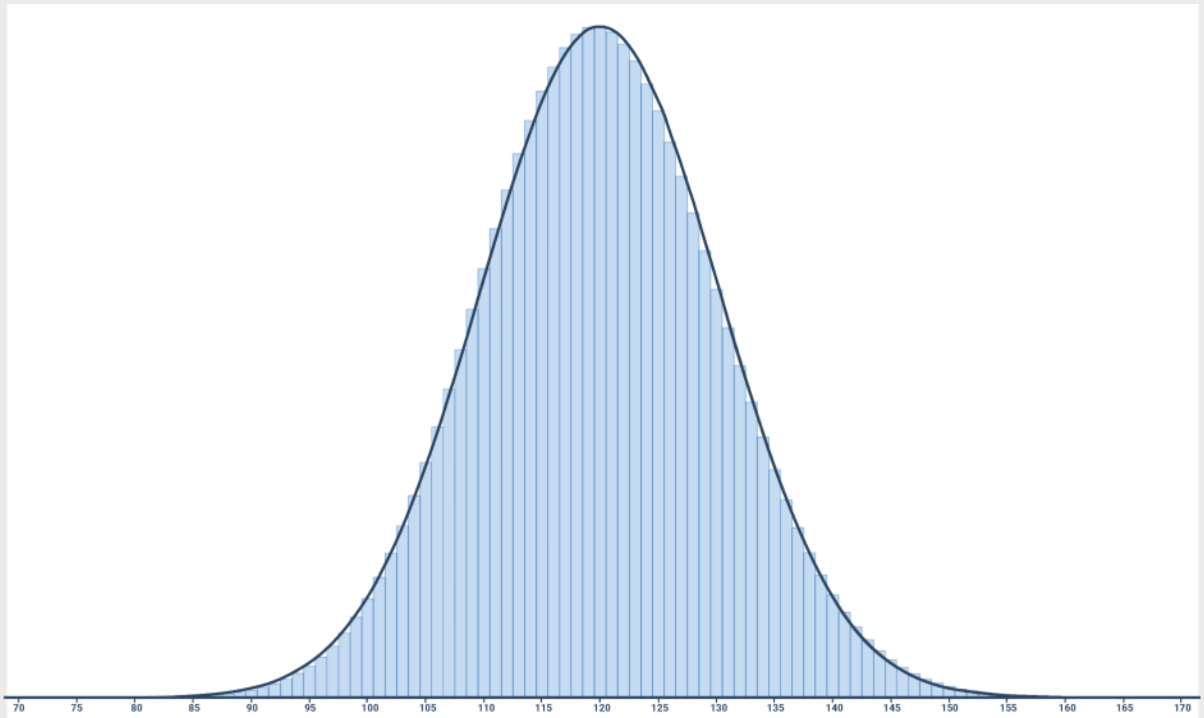
Et d’écart-type :

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{105{,}6} \approx 10{,}28$$

Exemple **Représentation visuelle**

Voici la représentation graphique de la loi binomiale *B(1 000 ; 0,12)* (en bleu), et la loi normale *N(120 ; 12,28)*.

Le graphique ne représente que les valeurs de 70 à 120 (qui représentent la majorité des probabilités de ces deux distributions).



On constate ici que lorsqu'on a une loi binomiale avec beaucoup de valeurs possibles, sa forme se rapproche de plus en plus d'une loi normale. C'est pour cela que l'approximation d'une binomiale par une normale se fera surtout pour une loi binomiale avec un *n* suffisamment grand. Et que plus *n* est grand, plus l'approximation est précise.

Exemple **Question 3**

Commençons par traduire la question en termes de probabilités. On se demande la probabilité que 135 catalogues ne soient pas suffisants pour répondre à la demande. Donc la probabilité qu'un nombre de personnes supérieur ou égal à 136 demandent un catalogue.

On cherche donc :

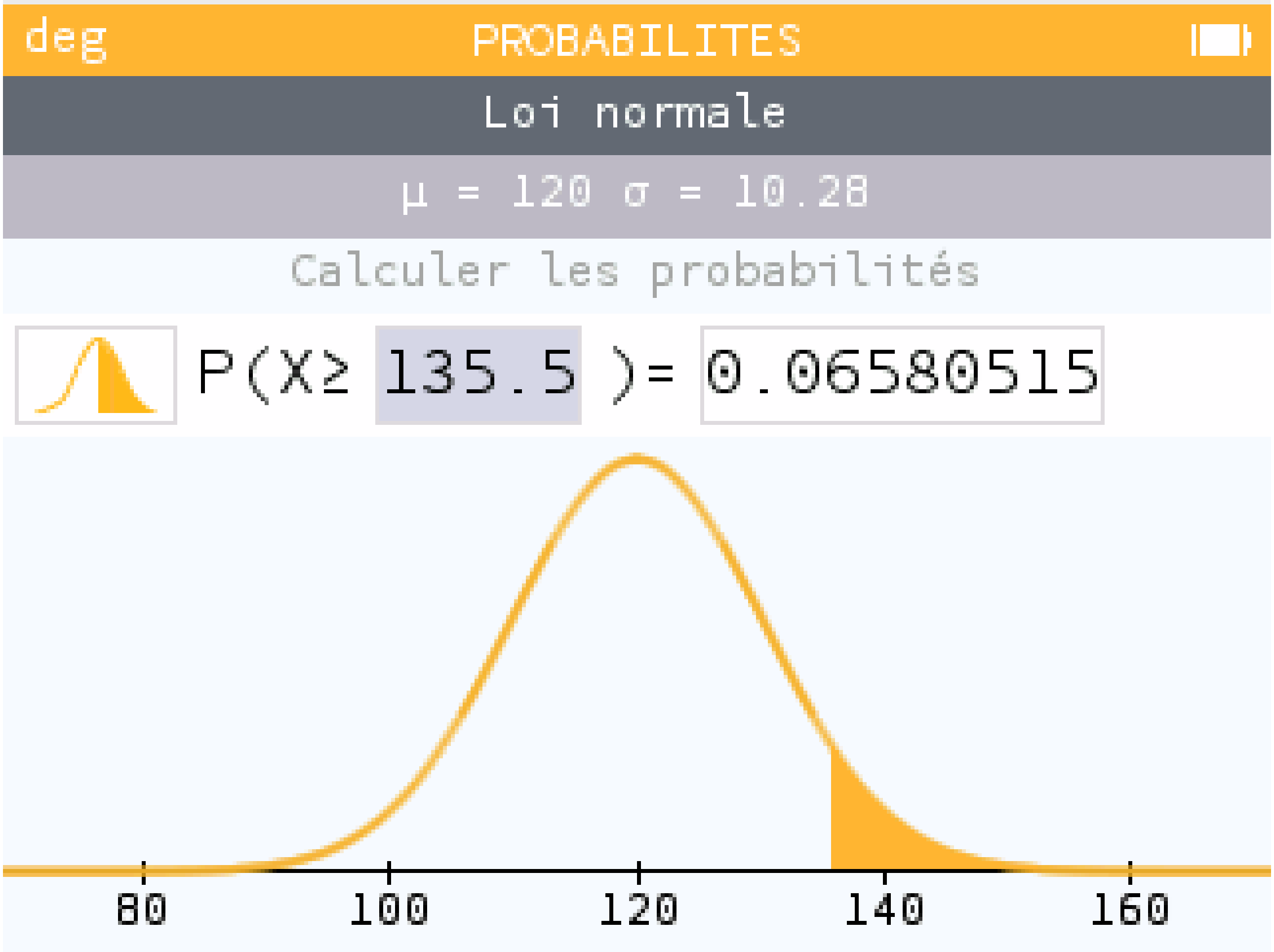
P(X ≥ 136)

À l'aide de la calculatrice :

En passant par l'approximation de *X* par *Y*, et en appliquant la correction de continuité (ici on enlève 0,5), on recherche maintenant la valeur de :

P(Y ≥ 135,5)

À l'aide de la calculatrice :



La valeur approchée de la probabilité d'avoir besoin d'au moins 136 catalogues est de : *P(Y ≥ 135,5) = 0,06580515*

Si on appelle 1 000 personnes il y a donc 6,6 % de chances qu'on soit à court de catalogues si on ne dispose que de 135 copies.

C. Combinaison de variables aléatoires

Changement de variable

Soit une variable aléatoire (qui peut suivre n'importe quelle loi).

Soient a, b deux réels constants. On définit la variable aléatoire $Y = aX + b$

Alors :

$$E(Y) = a \times E(X) + b$$
$$V(Y) = a^2 V(X)$$

Somme de variables aléatoires

Soient deux variables X et Y. On définit les variables aléatoires : $A = X + Y$ *et* $B = X - Y$.

On a :

$E(A) = E(X) + E(Y)$ et $E(B) = E(X) - E(Y)$

Si X et Y sont indépendantes on a :

$V(A) = V(X) + V(Y)$ et $V(B) = V(X) - V(Y)$

Somme de lois normales

Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y. Avec X suivant la loi normale $N_X\,(\mu_X\,;\,\sigma_X)$, et Y suivant $N_Y(\mu_Y\,;\,\sigma_Y)$.

On définit la variable aléatoire $Z = X + Y$.

La variable Z est distribuée selon une loi normale de paramètres :

$$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

Théorème de la limite centrée

Soit variables aléatoires indépendantes notées qui suivent toute une loi normale de mêmes paramètres .

Soit la variable aléatoire :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1, X_2, \dots, X_n}{n}$$

Si n est suffisamment grand alors $\overline{X}_n$ est distribuée selon une loi normale $N(u \; ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Remarque **Explication**

Ce théorème nous indique que si une variable aléatoire est la somme de beaucoup d'autres variables aléatoires qui suivent une loi normale, ce sera elle aussi une loi normale.

On a observé plus tôt que les variables aléatoires suivant une loi binomiale peuvent être très proches d'une loi normale.

Dans la pratique : toutes les variables qu'on va pouvoir relever son le fruit de beaucoup de facteurs.

Considérons une variable simple à mesurer : la taille à l'âge adulte d'une personne. Elle dépendra en premier lieu de facteurs génétiques (apportés par les deux parents). Ensuite de la croissance. Qui pourra être impactée par la nutrition, le stress, éventuellement des problèmes de santé (et dans ce cas l'accès aux soins). Et il existe probablement de nombreux autres facteurs ayant un impact.

Donc cette variable peut se considérer comme la somme d'un très grand nombre d'autres éléments. Ce qui explique que dans la pratique la taille d'un être vivant suivra une loi normale.

Il en va de même pour la plupart des valeurs qui sont le fruit de multiples facteurs biologies ou sociaux.

On retrouvera donc très souvent des lois normales en économie, dans les sciences humaines et sociales, et dans les domaines liés aux sciences naturelles.

Exercice : Quiz

[solution n°2 p.30]

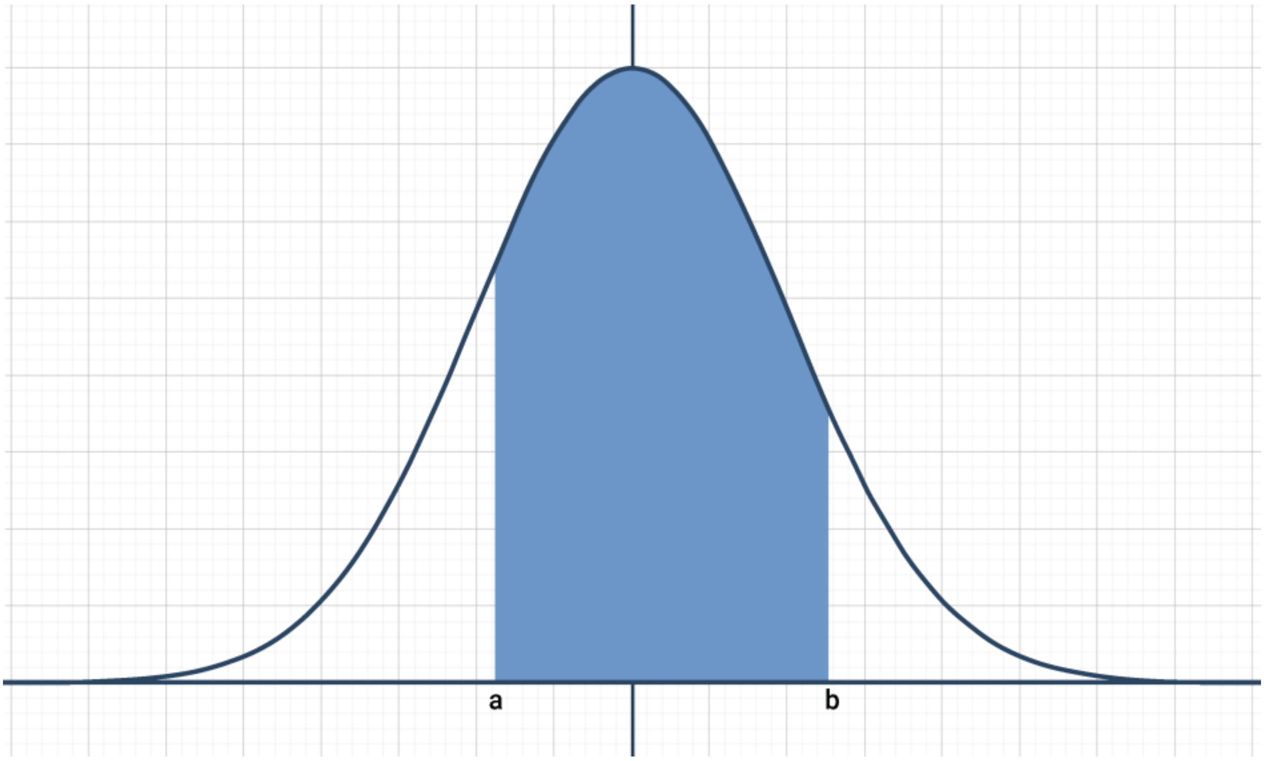
Question 1

Si X est distribué selon une loi normale, pour tout réel a on a : $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$

- Vrai
- Faux

Question 2

Sur cette représentation d'une loi normale, la valeur de la surface en bleu correspond à une probabilité de la forme $P(a \leq X \leq b)$



- Vrai
- Faux

Question 3

Pour une variable *X* distribuée selon la loi *N(0 , 1)*, on sait que *P(- 2 ≤ X ≤ 2) ≈ 0,997*

- Vrai
- Faux

Question 4

Pour une variable *X* distribuée selon *N(85 ; 5)*, 68 % des valeurs sont comprises entre 80 et 90.

- Vrai
- Faux

Question 5

Une variable *X* distribuée selon la loi binomiale *B(250 ; 0,2)* peut être approchée par la variable *Y* distribuée selon la loi normale *N(50 ; 40)*

- Vrai
- Faux

V. Essentiel

Les lois à densité nous permettent d'étudier les phénomènes aléatoires produisant des variables quantitatives continues. La plus simple d'entre elles est la loi uniforme, pour laquelle la probabilité d'un intervalle est proportionnelle à la taille de l'intervalle. Parmi les lois à densité, celle qui nous sera la plus utile est la loi normale, qui possède deux paramètres μ et σ. Tous les calculs de probabilité sur les lois normales peuvent se ramener à un calcul de la forme $P(X \leq k)$. Avant tout calcul sur une loi normale, il faudra s'assurer d'avoir bien vérifié si la situation correspond à une valeur remarquable de la forme $P(\mu + \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$, dans ces cas, on peut répondre sans aucun calcul (et il faut savoir identifier ces valeurs remarquables, et les probabilités associées).

VI. Auto-évaluation

A. Exercice

Une parfumerie s'intéresse au remplissage de ses flacons de parfum. On estime qu'un flacon de parfum est conforme lorsque la quantité de parfum qu'il contient est comprise entre 49 et 51 mL.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque flacon prélevé dans la production, associe la quantité de parfum qu'il contient, exprimée en mL.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 50 et d'écart-type 0,4.

Question 1

[solution n°3 p.31]

Calculer la probabilité que le flacon contienne moins de 49 mL de parfum. Arrondir la probabilité à 0,0001 près.

Question 2

[solution n°4 p.31]

Sans utiliser la calculatrice, donner la proportion des flacons qui contiennent entre 49,2 et 50,8 mL de parfum.

Question 3

[solution n°5 p.32]

Calculer la probabilité que le flacon soit non conforme. Arrondir la probabilité à 0,0001 près.

Question 4

[solution n°6 p.32]

L'entreprise produit 120 000 flacons par mois. Quel est le nombre moyen de flacons non conformes produits mensuellement ?

Solutions des exercices

Exercice p. 7 **Solution n°1**

Question 1

Une loi normale possède un seul paramètre, sa moyenne.

- Vrai
- (x) Faux

Faux, il faut deux paramètres pour définir une loi normale. Sa moyenne μ et son écart-type σ.

Question 2

Dans toute loi de probabilité continue, la moyenne et la médiane sont égales.

- Vrai
- (x) Faux

Faux, ce n'est pas le cas pour toutes les lois de probabilité continues. Mais c'est le cas pour la loi uniforme et la loi normale (qui sont les deux seules au programme) donc attention de ne pas généraliser ces propriétés.

Question 3

Dans une loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ toutes les valeurs comprises dans l'intervalle possèdent la même probabilité.

- (x) Vrai
- Faux

Vrai, c'est la définition des lois uniformes.

Question 4

Si la variable aléatoire X est distribuée selon une loi uniforme sur $[0;10]$ alors :
$P(3 \leq X \leq 4) = \dfrac{1}{10}$

- (x) Vrai
- Faux

Vrai, on réalise le calcul pour obtenir $P(3 \leq X \leq 4) = \dfrac{4-3}{10-0} = \dfrac{1}{10}$

Question 5

Si la variable aléatoire X est distribuée selon une loi uniforme sur $[-5\ ;\ 5]$ alors $P(3 \leq X \leq 4) = \dfrac{1}{10}$

- [x] Vrai
- [ ] Faux

Vrai, le fait qu'une borne de l'intervalle soit négative n'est pas un problème dans la formule :

$$P(3 \leq X \leq 4) = \frac{(4-3)}{(5-(-5))} = \frac{1}{10}$$

Exercice p. 26 **Solution n°2**

Question 1

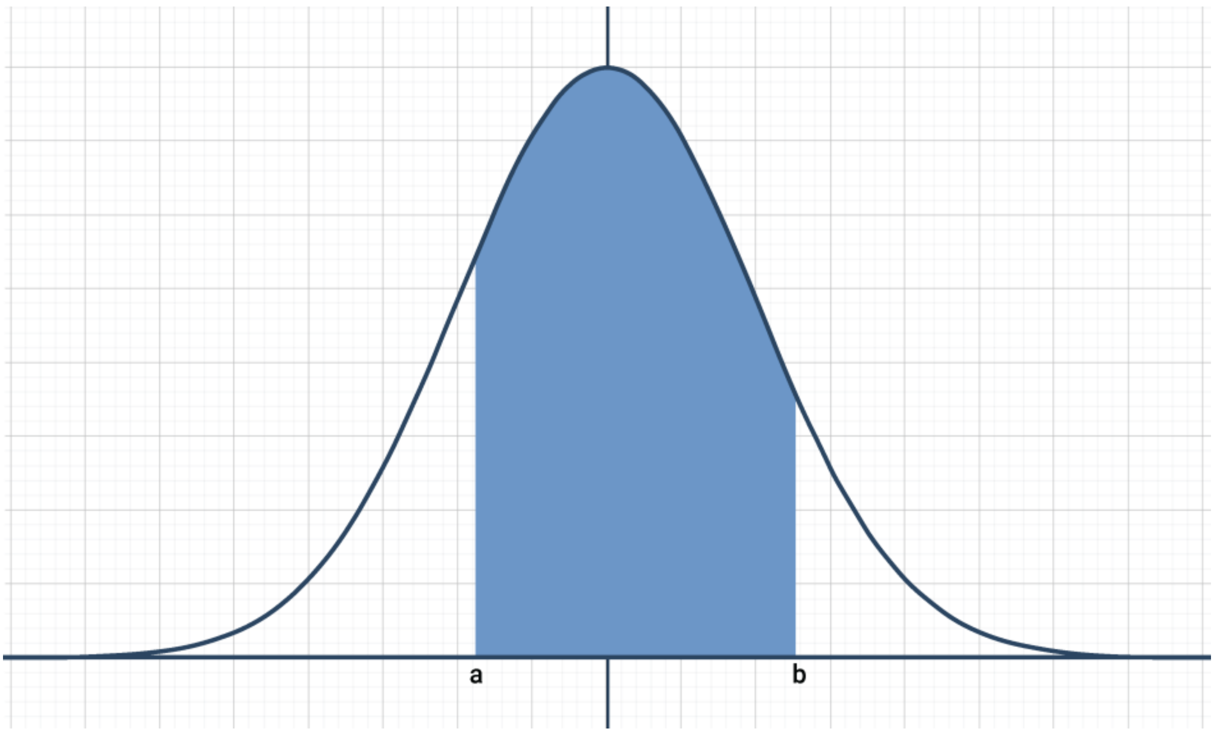
Si *X* est distribué selon une loi normale, pour tout réel a on a : $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$

- [x] Vrai
- [ ] Faux

Vrai, les deux événements : $(X \leq a)$ et $(X \geq a)$ sont complémentaires, donc on a : $P(X \leq a) + P(X \geq a) = 1$. Ce qui nous donne : $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$

Question 2

Sur cette représentation d'une loi normale, la valeur de la surface en bleu correspond à une probabilité de la forme $P(a \leq X \leq b)$



- [x] Vrai
- [ ] Faux

Vrai, la probabilité que la variable *X* soit comprise entre *a* et *b* correspond à la surface sous la courbe de la loi normale, entre *a* et *b*.

Question 3

Pour une variable X distribuée selon la loi $N(0\ ,\ 1)$, on sait que $P(-\ 2 \leq X \leq 2) \approx 0{,}997$

- [ ] Vrai
- [x] Faux

Faux, l'expression $P(-\ 2 \leq X \leq 2)$ est de la forme $P(\mu\ -\ 2\ \sigma \leq X \leq \mu + 2\ \sigma)$, et on a :
$P(\mu\ -\ 2\ \sigma \leq X \leq \mu + 2\ \sigma) \approx 0{,}95$. La valeur 0,997 correspond a $P(\mu\ -\ 3\ \sigma \leq X \leq \mu + 3\ \sigma)$.

Question 4

Pour une variable X distribuée selon $N(85\ ;\ 5)$, 68 % des valeurs sont comprises entre 80 et 90.

- [x] Vrai
- [ ] Faux

Vrai, on remarque que l'intervalle $[80\ ;\ 90]$ est centré autour de 85, et si on écrit sa probabilité on a : $P(80 \leq X \leq 90) = P(85\ -\ 5 \leq X \leq 85 + 5)$. Donc la forme : $P(\mu\ -\ \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68$

Question 5

Une variable X distribuée selon la loi binomiale $B(250\ ;\ 0{,}2)$ peut être approchée par la variable Y distribuée selon la loi normale $N(50\ ;\ 40)$

- [ ] Vrai
- [x] Faux

Faux, la loi de X correspond à une moyenne $E(X) = 250 \times 0{,}2 = 50$, et une variance

$V(X) = 250 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 40$. Cependant pour approcher une loi binomiale par une loi normale,

il faut prendre son espérance et son écart-type (pas sa variance). L'écart-type de est :

$\sigma_X = \sqrt{40} \approx 6{,}32$. Donc dans ce cas la loi de Y devrait être N(50 ; 6,32)

p. 28 Solution n°3

À la calculatrice : $P(Y < 49) = 0{,}006209666 \approx 0{,}0062$

Il y a une probabilité de 0,0062 qu'un flacon soit contienne moins de 49 mL de parfum.

p. 28 Solution n°4

On remarque que l'intervalle $49{,}2 \leq X \leq 50{,}8$ correspond à un intervalle de la forme :

$\mu\ -\ 2\ \sigma \leq X \leq \mu + 2\ \sigma$

C'est une valeur remarquable pour une loi normale, qui contient 95 % des valeurs.

Donc 95 % des flacons contiennent entre 49,2 et 50,8 mL de parfum.

p. 28 Solution n°5

La probabilité d'être conforme est de : $P(49 \leq Y \leq 51) = 0{,}9875807$

La probabilité qu'un flacon pris au hasard soit non conforme est : $1 - P(49 \leq Y \leq 51) \approx 0{,}0124$

p. 28 Solution n°6

Note : cette question ne demande aucun calcul spécifique lié à la loi normale. En examen il arrive régulièrement que les sujets incluent une question de ce genre dans des exercices.

À la question précédente nous avons estimé que la probabilité qu'un flacon soit non conforme est de 0,0124. Sur 120 000 flacons on aura donc en moyenne : 120 000 × 0,0124 = 1 488 flacons non conformes.

En moyenne sur 120 000 flacons produits mensuellement, il y aura 1 488 flacons non conformes.